This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

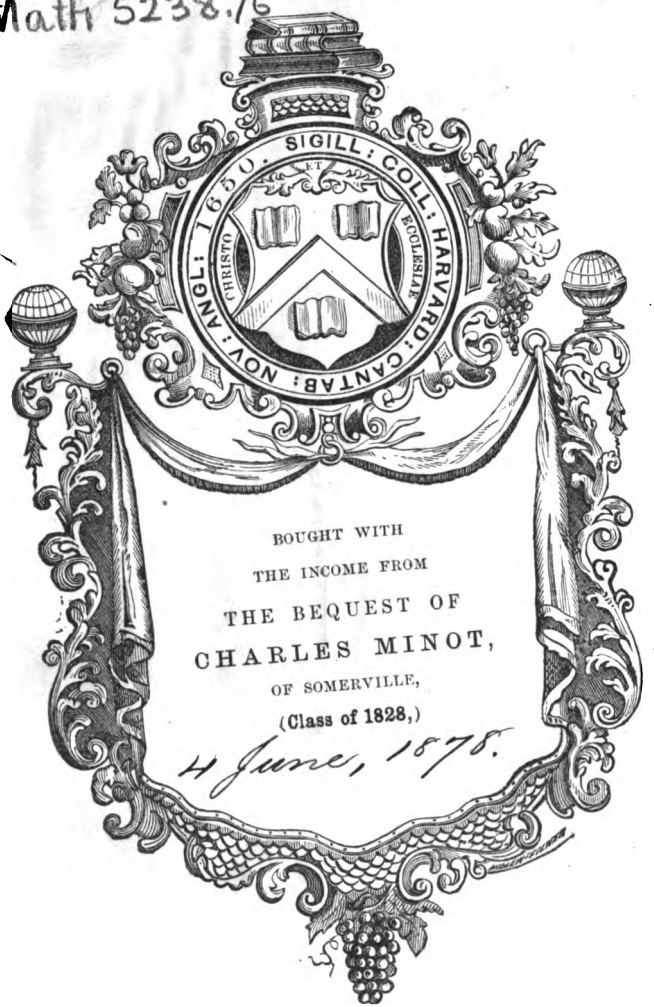
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 5238.76



BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
CHARLES MINOT,
OF SOMERVILLE,
(Class of 1828,)
4 June, 1878.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Geometrische Analysis.

Eine

systematische Anleitung zur Auflösung

von

Aufgaben aus der ebenen Geometrie

auf

reingeometrischem Wege

von

Oberstudienrath Dr. von Nagel,

Ritter I. Classe des k. württemb. Kronordens und des k. württemb. Friedrichsordens.

Mit 155 Holzschnitten.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Ulm, 1876.

Wohler's Verlagsbuchhandlung.

(F. Lindemann.)

Digitized by Google

~~VI, 38~~
Math 5238.76

1878, June 4.
Minot fund.

Digitized by Google

Vorwort.

Das vorliegende Werk erscheint als Ergänzung meines Lehrbuches der ebenen Geometrie, das bereits in der 13ten Auflage die weiteste Verbreitung gefunden hat. Dasselbe ging schon in der ersten Auflage von dem gewiß richtigen Gesichtspunkte aus, daß, wie die ganze Mathematik, so besonders auch die Geometrie nicht blos eine Wissenschaft, sondern auch eine Kunst sei, d. h. daß es nicht genüge, die Sätze der Wissenschaft zu wissen und ihren Zusammenhang unter einander einzusehen, daß sie vielmehr auch ein Mittel sein müssen, um etwas selbständig damit leisten zu können. Denn nicht blos gewinnt durch Anwendung die Theorie selbst, indem das Wesen und der innere Zusammenhang so wie die Wichtigkeit und der Umfang eines Satzes dadurch gar häufig in ein neues Licht gesetzt wird, sondern die

Digitized by Google

Kraft des Schülers wird um so mehr gestärkt und sein mathematischer Sinn geübt, je mehr er nicht blos reproduktiv im Auffassen der Wissenschaft, sondern auch produktiv wird im Selbstlösen von Aufgaben.

Von der früher so verbreiteten Ansicht, daß ganz besondere Anlagen dazu gehören, um in der Mathematik auch nur etwas Erträgliches zu leisten, ist man in neueren Zeiten mit den Fortschritten der Pädagogik und Methodik längst zurückgekommen. Man hat einsehen gelernt, daß allerdings, um etwas über das gewöhnliche und für das praktische Leben nothwendige Ziel hinauszugehen und Schöpferisches hierin zu leisten, mit einem Worte, um eigentlicher Mathematiker zu werden, auch hier wie in jedem andern Fach des menschlichen Strebens, besondere Anlagen und damit zusammenhängend besondere Neigungen erforderlich seien. Aber um bis zu einem gewissen Grade Herr des mathematischen Stoffes zu werden, bedarf der junge Schüler nicht mehr als gesunden Menschenverstand, Fleiß und Eifer und richtige Leitung seiner Studien, Dinge die er auch zu jedem andern Streben nöthig hat.

Diese Leitung nun versucht die vorliegende Schrift zu geben, hervorgegangen aus praktischer Erfahrung während einer langjährigen Thätigkeit im Lehrerberufe, die häufig durch schöne Erfolge belohnt war.

Digitized by Google

Daß das Bedürfniß aber seit dem Erscheinen der ersten Auflage bedeutend gewachsen war, läßt sich nicht ableugnen. Abgesehen davon, daß im Allgemeinen die Mathematik in den Augen der Einsichtsvolleren sehr an Bedeutung gewonnen hat, als eine Seite des menschlichen Wissens, welche für die harmonische Ausbildung des menschlichen Geistes ein wesentlich ergänzender Faktor ist, woher es kommt, daß auch in Anstalten, welche mehr die ethische Seite der menschlichen Bildung zum Ziele haben, die Mathematik eine ganz andere Pflege genießt als früher, ist es besonders der große Aufschwung der Technik, welcher hier namentlich auch für unsere Wissenschaft einen ausgedehnteren Boden geschaffen hat. Die großartigen Anstalten der polytechnischen Schulen sind es daher vor Allem, welche in der konstruktiven Mathematik ihre hohe Wichtigkeit errungen haben. Sie waren zunächst die Veranlassung, daß unser Jahrhundert einen neuen Zweig der Geometrie gleichsam erst entdeckte, die sogenannte beschreibende Geometrie (géometrie descriptive), welche in umfassender Ausdehnung jetzt die Grundlage des polytechnischen Unterrichts in seinem konstruktiven Gebiete bildet.

Rückwirkend übte dieß auch seinen Einfluß auf die ebene Geometrie. Während die rechnende Geometrie (die algebraische Behandlung der Aufgaben) in ihrem aner-

Digitized by Google

kannten Werthe nicht verkürzt wurde, erhielt auf's Neue die konstruktive Behandlung der geometrischen Aufgaben, die eine Zeitlang auffallend vernachlässigt worden war, ihre volle frühere Bedeutung, die sie längere Zeit verloren hatte, und es entstand eine größere Zahl von Aufgabensammlungen mit Lösungen nach der synthetischen Methode der alten griechischen Mathematiker, die allerdings auf diese Methode allein angewiesen waren, da ihnen die algebraische Behandlung noch gänzlich fremd war.

Auch an mich ergiengen zu verschiedenen Zeiten und von verschiedenen Seiten vielfache Aufforderungen, eine Sammlung von Auflösungen der zahlreichen in meiner ebenen Geometrie ohne Lösung enthaltenen Aufgaben zu bearbeiten. Warum ich dieß nach meiner Ueberzeugung nicht thun konnte, wird sich aus dem Studium der vorliegenden Schrift leicht ergeben. Ich wollte keine sogenannte Eselsbrücke bauen, welche die eigene Kraft des Schülers eher lähmt als stärkt. Als daher ein auf Honorar spekulirender junger Polytechniker — pseudonym als Julius Meng — vermittelst einer in jeder Beziehung schülerhaften Arbeit die vermeintliche Lücke auszufüllen versuchte, war es bei der bald erschienenen neuen Auflage meiner ebenen Geometrie für mich Gewissenssache, den Anhang derselben so umzuarbeiten,

Digitized by Google

daß der Schüler die Arbeit von Meng zur Erleichterung seiner Studien und zu etwaiger Begünstigung seiner Trägheit nur schwer benützen konnte. Mein Zweck wurde erreicht. Trotz der vielen noch nachfolgenden Auflagen des Hauptwerkes erschien von Mengs Buch keine zweite.

Etwas ganz anderes bezweckt die vorliegende Schrift. Sie soll dem Schüler die Hauptgesichtspunkte darlegen, von denen er beim Selbstauffinden der Lösung geometrischer Aufgaben ausgehen muß. Zu diesem Zwecke soll sie theils beim öffentlichen Unterrichte gebraucht werden, da in neuerer Zeit in den Schulplanen größerer Anstalten vielfach besondere Unterrichtsstunden für geometrische Analysis bestimmt wurden, theils soll sie einen Gegenstand des Privatstudiums der Schüler bilden. Zugleich lag es in meiner Absicht, auch manchen angehenden Lehrern zu zeigen, daß das Auffinden von Auflösungen nicht, wie manche meinen, eine bloße Sache des Zufalls oder einer eigenthümlichen, nicht jedem gegebenen Geschicklichkeit sei, sondern daß auch diesen Uebungen bestimmte allgemeine Regeln zu Grunde liegen. Daß ich bei dieser neuen Auflage die Erfahrungen, welche ich während des Unterrichts in diesem Fache gemacht hatte, mit Gewissenhaftigkeit benützt habe, versteht sich wohl von selbst.

Digitized by Google

Möge nun diese Schrift dazu beitragen, das Studium der Mathematik zu fördern und zu beleben. Ich würde darin den vollen Lohn finden für ein Streben, dem ich den größten Theil eines fünfzigjährigen Lehrerberufes und den für mich genußreichsten Theil meiner schriftstellerischen Thätigkeit gewidmet habe.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Inhalt.

Seite

Erstes Buch. Ueber die Natur und über die Theile einer Aufgabe 1

§. 1. Die Natur der Aufgabe 1

§. 2. Von den Hauptbestandtheilen einer Aufgabe . . 5

§. 3. Von der Aufgabe im engern Sinne 6

§. 4. Von der Konstruktion 23

§. 5. Von dem Beweise 28

§. 6. Von der Determination 29

Zweites Buch. Ueber die geometrische Analysis 36

§. 1. Wesen der geometrischen Analysis 36

§. 2. Auflösung einiger geometrischen Aufgaben durch Anwendung der geometrischen Analysis 49

§. 3. Der Zusammenhang der geometrischen Analysis mit der Konstruktion und dem Beweise 84

Drittes Buch. Die verschiedenen Hauptwege, um zur Auflösung geometrischer Aufgaben zu gelangen 90

§. 1. Allgemeine Bemerkungen über diese Wege . . . 90

§. 2. Die Auflösung der Aufgaben durch Analogie . . 91

§. 3. Die Auflösung der Aufgaben durch Reduktion . . 121

§. 4. Die Auflösung der Aufgaben durch Lehrsätze . . 146

§. 5. Die Auflösung der Aufgaben durch Data . . . 160

§. 6. Die Auflösung der Aufgaben durch geometrische Oerter. 180

Viertes Buch. Lehre von den geometrischen Oertern . . . 197

Anhang. Sammlung von Aufgaben 252

Digitized by Google

Verzeichniß

der

im Texte gelösten Aufgaben.

Seite

1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, dessen Hypotenuse gegeben ist und bei welchem eine Kathete gleich sei dem nicht anliegenden Segmente der Hypotenuse 3. 147

2. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen . . 25

3. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Grundlinie und der Winkel an der Spitze gegeben sind . . 27

4. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem die drei von den Winkelspitzen nach den Halbirungspunkten der Gegenseiten gezogenen Transversalen gegeben sind 33

5. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Hypotenuse und die Summe beider Katheten gegeben sind . 37. 71

6. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Summe beider Katheten und der von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel gegeben sind . 38. 75. 95

Digitized by Google

Seite

7. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem eine Seite, ein anliegender Winkel und die Summe beider andern Seiten gegeben sind 41

8. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Halbirungslinie des letztern gegeben sind 44

9. Ein Kreis ist durch eine Chorde in zwei Bögen getheilt; von dem Halbirungspunkte des einen Bogens aus eine Chorde so in den Kreis zu legen, daß das in den zum andern Bogen gehörigen Kreisabschnitt fallende Stück derselben eine gegebene Größe habe 45

10. Zu einer gegebenen geraden Linie als mittlerer Proportionallinie die beiden äußern Glieder zu finden, wenn deren Differenz gegeben ist 46

11. In einen gegebenen Quadranten einen Kreis zu beschreiben . 49

12. Von einem gegebenen Punkte außerhalb eines gegebenen Kreises durch denselben eine Sekante so zu ziehen, daß das außerhalb des Kreises liegende Stück derselben dem in den Kreis fallenden gleich werde 58

12b. Durch einen gegebenen Punkt auf der Peripherie des größern von zwei konzentrischen Kreisen eine Chorde in denselben zu legen, die von der Peripherie des kleinern Kreises in drei gleiche Theile getheilt wird 65

13. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben sind eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Summe der beiden andern Seiten 66

14. Ein gegebener Kreis ist durch einen Durchmesser in zwei Halbkreise getheilt und auf der Peripherie des einen Halbkreises sind zwei Punkte gegeben; auf der Peripherie des andern Halbkreises einen Punkt zu suchen, der die Eigenschaft hat, daß die von ihm nach den gegebenen Punkten gezogenen Chorden den Durchmesser in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte schneiden . . 79

15. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem die Summe zweier Seiten, der eingeschlossene Winkel und der zur dritten Seite gehörige Höhenperpendikel gegeben sind 94

Digitized by Google

Seite

16. In einen gegebenen Kreisabschnitt einen Kreis zu beschreiben . 99

17. Eine gerade Linie und zwei Punkte auf einer Seite derselben sind gegeben; auf der geraden Linie soll ein Punkt gefunden werden, welcher die Eigenschaft hat, daß zwei von ihm nach den gegebenen Punkten gezogene gerade Linien mit der geraden Linie gleiche Winkel machen 101

18. Eine gerade Linie und auf einer Seite derselben ein Punkt und ein Kreis sind gegeben; auf der geraden Linie soll ein Punkt gefunden werden, welcher die Eigenschaft hat, daß eine von ihm nach dem gegebenen Punkte gezogene gerade Linie und eine von ihm nach dem gegebenen Kreise gezogene Tangente mit der gegebenen geraden Linie gleiche Winkel machen 102

18b. Dieselbe Aufgabe wie 18, nur dadurch verallgemeinert, daß statt „Tangente" verlangt wird eine „Sekante mit gegebener Größe der dadurch entstehenden Chorde" 103

19. Eine gerade Linie und auf einer Seite derselben zwei Kreise sind gegeben; auf der geraden Linie soll ein Punkt gefunden werden, welcher die Eigenschaft hat, daß die von ihm nach beiden Kreisen gezogenen Tangenten mit der gegebenen geraden Linie gleiche Winkel machen 103

19b. Dieselbe Aufgabe wie 19, nur daß allgemeiner statt „Tangenten" verlangt werden „Sekanten mit gegebenen Größen der dadurch entstehenden Chorden" 103

20. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Hypotenuse und die Differenz beider Katheten gegeben sind . . 107

21. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben sind eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Differenz beider andern Seiten 107

22—24. Dieselben Aufgaben wie 17—19; nur liegen in Aufgabe 22 die beiden gegebenen Punkte, in Aufgabe 23 der gegebene Punkt und gegebene Kreis, in Aufgabe 24 die beiden gegebenen Kreise nicht auf der nemlichen Seite der gegebenen geraden Linie, sondern auf entgegengesetzten Seiten 113

25. Durch einen der Durchschnittspunkte zweier einander schneidender Kreise eine gerade Linie so hindurch zu ziehen, daß die Summe der beiden in die Kreise hineinfallenden Chorden eine gegebene Größe habe 114

Digitized by Google

Seite

26. Durch einen der Durchschnittspunkte zweier einander schneidender Kreise eine gerade Linie so hindurchzuziehen, daß die Differenz der beiden in die Kreise hineinfallenden Chorden eine gegebene Größe habe 117

27. Ein Parallelogramm zu konstruiren, von welchem gegeben sind die Summe beider Diagonalen, der Winkel, unter welchem sie sich schneiden und die Entfernung zweier parallelen Seiten von einander 123

28. Ein Trapez zu konstruiren, von welchem gegeben sind die beiden nichtparallelen Seiten, die Summe der Winkel, welche dieselben mit einer der parallelen Seiten machen, und der Winkel, unter welchem sich die Diagonalen schneiden 124

29. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist ein Winkel, die zu diesem Winkel gehörige Mittellinie und der Winkel, welchen diese Mittellinie mit der gegenüberliegenden Seite macht 124

30. Ein Parallelogramm zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Diagonale, der Winkel durch den sie geht und der Winkel, unter dem sich beide Diagonalen schneiden 125

31. Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene gerade Linie berührt 128

32. Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt 129

33. Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene gerade Linien berührt 131

34. Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene gerade Linie und einen gegebenen Kreis berührt 133

35. Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kreise berührt 135

36. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene gerade Linien und einen gegebenen Kreis berührt 137

Digitized by Google

Seite

37. Einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene gerade Linie und zwei gegebene Kreise berührt 139

38. Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebenene Kreise berührt 141

39. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen geraden Linie liegt, der durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt 143

40. Auf einer gegebenen geraden Linie einen Punkt zu finden, der die Eigenschaft hat, daß die Summe oder die Differenz der beiden von ihm nach zwei gegebenen Punkten gezogenen geraden Linien einer gegebenen geraden Linie gleich sei 143

41. Ein Kreis und zwei Punkte sind gegeben; auf dem Kreise einen Punkt zu finden, der die Eigenschaft hat, daß, wenn man von ihm nach den gegebenen Punkten gerade Linien zieht, dieselben den Kreis noch einmal in zwei Punkten so schneiden, daß die Verbindungslinie dieser Schneidungspunkte der Verbindungslinie der gegebenen Punkte parallel ist . . 143

42. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so hindurch zu ziehen, daß die Summe der von drei andern gegebenen Punkten auf sie gefällten Perpendikel von gegebener Größe sei 149

43. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und der Halbmesser des innern Berührungskreises 153

44. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Seite, die Summe beider andern Seiten und die Summe der zu ihnen gehörigen Höhenperpendikel 162

45. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist ein Winkel, der von der Spitze desselben auf die Gegenseite gefällte Perpendikel und die Summe der beiden andern Höhenperpendikel . 163

46. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Mittellinie, die Halbirungslinie des zu ihr gehörigen Winkels und die Differenz der beiden andern Winkel 164

Digitized by Google

Seite

47. Ein Parallelogramm zu konstruiren, von welchem gegeben ist der Flächeninhalt, ein Höhenperpendikel und die Differenz der Quadrate beider Diagonalen 165

48. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und der zu dieser Seite gehörige Höhenperpendikel 183

49. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und ein zu einer der beiden andern Seiten gehöriger Höhenperpendikel 184

50. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist ein Winkel und die beiden zu den ihn einschließenden Seiten gehörigen Höhenperpendikel 186

51. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist ein Winkel, der zu der Gegenseite gehörige Höhenperpendikel und ein zu einer der einschließenden Seiten gehöriger Höhenperpendikel 187

52. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben sind ein Winkel, der zu der Gegenseite gehörige Perpendikel und die zu derselben Seite gehörige Mittellinie 188

53. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Seite, der ihr gegenüberliegende Winkel und die Summe einer zweiten Seite und des zu der letztern gehörigen Höhenperpendikels 189

54. Eine gerade Linie zu ziehen, welche die Eigenschaft hat, daß die von zwei gegebenen Punkten auf sie gefällten Perpendikel gegebenen geraden Linien gleich werden 191

55. Auf einer gegebenen geraden Linie einen Punkt zu suchen, der die Eigenschaft hat, daß die von ihm nach einem gegebenen Kreise gezogene Tangente eine gegebene Größe habe . . . 192

56. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Kreisperipherie halbirt und von einer ge-

Digitized by Google

Seite

gebenen geraden Linie eine Chorde von gegebener Größe abschneidet 193

57. Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu beschreiben, der die Eigenschaft hat, daß die von zwei andern gegebenen Punkten an ihn gezogenen Tangenten sich, wenn's nöthig ist, verlängert unter einem gegebenen Winkel schneiden 195

Digitized by Google

Erstes Buch.

Ueber die Natur und über die Theile einer Aufgabe.

§. 1.

Die Natur der Aufgabe.

Die Sätze der ebenen Geometrie zerfallen in zwei Hauptklassen, in *Lehrsätze* und *Aufgaben*. Die ersteren sprechen eine allgemeine geometrische Wahrheit aus, indem sie erklären, daß, wenn eine Raumgröße irgend eine vorausgesetzte — natürlich aus frühern Sätzen als möglich erkannte — Eigenschaft habe, oder wenn mehrere solcher Eigenschaften bei ihr als zusammentreffend vorausgesetzt werden, oder endlich wenn mehrere Raumgrößen vorausgesetzte Beziehungen zu einander haben, mit Nothwendigkeit andere Eigenschaften oder Beziehungen daraus folgen.

Die Aufgaben dagegen verlangen, daß irgend eine Raumgröße gebildet, konstruirt werden solle, welche gegebene Eigenschaften habe, oder daß mehrere Raumgrößen konstruirt werden, welche in verlangten Beziehungen zu einander stehen. Lehrsätze und Aufgaben sind also nach dem Bemerkten zunächst *stofflich* von einander verschieden, indem die Aufgaben die bildliche Darstellung von Raumgrößen mit bestimmten Eigenschaften verlangen, während die Lehrsätze die Eigenschaften bestimmter Raumgrößen aussprechen.

Digitized by Google

Wesentlicher aber ist der Unterschied in der Form der Lehrsätze und Aufgaben. Jeder Lehrsatz ist — logisch bezeichnet — ein allgemeiner Satz, und zwar entweder ein allgemein bejahender oder ein allgemein verneinender, in der bei weitem größten Zahl von Fällen das erstere, da es weit wichtiger ist, zu wissen, was ein Ding ist, als was es nicht ist. Alle Lehrsätze können also unter eine der beiden folgenden Formen des Ausdrucks gebracht werden: 1) Alle A sind B, 2) alle A sind nicht B; d. h. allen denjenigen Raumgrößen, welchen die mit A bezeichneten Merkmale oder Eigenschaften zukommen, müssen auch die mit B bezeichneten Merkmale oder Eigenschaften im ersten Falle zugesprochen, im zweiten abgesprochen werden. Die sprachliche Ausdrucksweise stimmt allerdings nicht immer mit der hier bezeichneten logischen zusammen; namentlich kann jeder allgemeine Satz auch als bedingter (hypothetischer) ausgesprochen werden, indem gesagt wird: wenn einem Dinge das Merkmal A zukommt, so muß ihm auch das Merkmal B zugesprochen oder abgesprochen werden. Daher rührt es auch, daß so viele Lehrsätze in der Form von bedingten oder hypothetischen Sätzen ausgedrückt werden.

Die Form der Aufgabe dagegen besteht darin, daß ausgesprochen wird, es soll eine Raumgröße, eine Figur konstruirt werden, welche bestimmte, ausdrücklich verlangte Eigenschaften habe. Da diese Eigenschaften, wie sich von selbst versteht, geometrische sind, also in bestimmten Größen von Linien, Winkeln, Flächen u. s. w. oder in bestimmter gegenseitiger Lage von Linien, oder endlich in bestimmter Form der Figur, also in bestimmtem Verhältnisse gewisser Größen zu einander bestehen, so heißt das Verlangen: eine Figur mit bestimmten Eigenschaften zu konstruiren, so viel als: eine Figur zu konstruiren, zu deren Konstruktion bestimmte Bedingungen gegeben sind, indem diese Bedingungen entweder Linien, (Winkel, Flächen 2c.) sein werden, von gegebener Größe, oder von gegebener Lage, d. h. parallel gegebenen Linien, so daß Theile der Figur auf gegebene Linien fallen, und Aehnliches, oder endlich von gegebenem Verhältniß. Daher ist im Allgemeinen die Form, in welcher jede Aufgabe ausgesprochen wird, folgende:

Digitized by Google

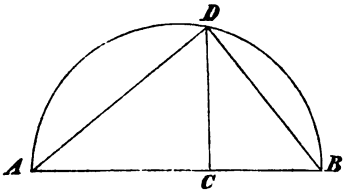
es soll eine Figur konstruirt werden, zu deren Konstruktion die Bedingungen A, B, C, u. s. w. gegeben sind, oder, was einerlei ist, welche die mit A, B, C u. s. w. bezeichneten Merkmale oder Eigenschaften habe. Die bisherige Darstellung zeigt zugleich, daß zwischen Lehrsätzen und Aufgaben der Unterschied in der Form ein wesentlicherer ist, als der im Stoffe, indem es viele Stoffe gibt, welche ebenso gut als Lehrsätze wie als Aufgaben ausgesprochen werden können. Statt nemlich den Lehrsatz auszusprechen: Alle A sind B, kann auch die Aufgabe gegeben werden, eine Figur zu konstruiren, welche die mit B bezeichneten Eigenschaften habe; die Auflösung besteht nun darin, daß man eine Figur konstruirt, welche die mit A bezeichneten Eigenschaften hat, worauf der Beweis nachweist, daß dadurch auch die mit B bezeichneten Eigenschaften vorhanden seien. Es ist dadurch der Lehrsatz: Alle A sind B, in eine Aufgabe verwandelt worden. Auf ähnliche Weise kann umgekehrt eine Aufgabe in einen Lehrsatz umgewandelt werden.

Einige Beispiele werden das Behauptete deutlicher machen. Wir wählen absichtlich zuerst einen der bekanntesten Lehrsätze, den pythagorischen Lehrsatz, welcher heißt: In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate beider Katheten. Anstatt diesen Lehrsatz aufzustellen, könnte man auch die Aufgabe geben: Ein Quadrat zu konstruiren, welches gleich der Summe zweier gegebener Quadrate ist. Die Auflösung würde dann heißen: Konstruire ein rechtwinkliges Dreieck, dessen beide Katheten gleich den Seiten der gegebenen Quadrate sind, so ist die Hypotenuse dieses Dreiecks gleich der Seite des gesuchten Quadrats. Der Beweis wäre hierauf der nemliche, wie er für den pythagorischen Lehrsatz selbst geführt wird.

Ein anderes Beispiel ist folgendes: In vielen Aufgabensammlungen findet sich die Aufgabe, ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, dessen Hypotenuse gegeben ist, und bei welchem eine Kathete dem nicht anliegenden Segmente der Hypotenuse gleich werden soll.

Digitized by Google

Die Auflösung ist folgende:



Mache AB gleich der gegebenen Hypotenuse, schneide AB in C stetig proportionirt, d. h. so, daß AB: AC: CB ist, beschreibe über AB als Durchmesser einen Halbkreis, und errichte auf AB in C einen Perpendikel, welcher den Halbkreis in D treffe, ziehe endlich AD und BD, so ist ADB das gesuchte Dreieck.

Beweis: Da ADB Winkel im Halbkreise ist, so ist △ ABD rechtwinklig; folglich da DC der von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel ist, so ist $BD^2 = AB \cdot CB$. Da nun aber nach der Konstruktion AB: AC: CB ist, so ist auch $AC^2 = AB \cdot CB$; mithin ist $BD^2 = AC^2$, also auch BD = AC.

Statt dieser Aufgabe nun könnte auch folgender Lehrsatz ausgesprochen werden: Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke ABD der von der Spitze D des rechten Winkels auf die Hypotenuse AB gefällte Perpendikel DC die Hypotenuse in C stetig proportionirt theilt (d. h. so theilt, daß AB : AC : CB ist), so ist die kleinere Kathete BD gleich dem größeren der Kathete nicht anliegenden Segmente AC der Hypotenuse. Der Beweis ist derselbe wie oben: $AC^2 = AB \cdot CB$; aber auch $BD^2 = AB \cdot CB$; also $BD^2 = AC^2$, und daher BD = AC.

Es besteht daher der wesentlichere Unterschied zwischen Lehrsätzen und Aufgaben nicht im Stoffe, sondern in der Form, und wenn gleich allerdings die Natur des Stoffes das einemal mehr zum Ausdrucke in einem Lehrsatze, das anderemal mehr zur Aufgabe sich eignet, so gibt es doch häufige Fälle, in welchen beide Darstellungsweisen gleiche Berechtigung haben. Einen solchen Fall möchte gerade das letzte Beispiel zeigen.

Digitized by Google

§. 2.

Von den Hauptbestandtheilen einer Aufgabe.

Jeder geometrische Lehrsatz ist der Ausdruck einer allgemeinen Wahrheit. Da nun aber ein Satz dadurch blos, daß er ausgesprochen wird, noch nicht wahr ist, so bedarf er, um von uns für wahr erkannt zu werden, einer Begründung, oder eines Beweises, und jeder vollständig ausgeführte Lehrsatz besteht somit aus zwei Theilen, aus dem Lehrsatze und dem Beweise. Die Begründung aber ist, wie sich von selbst versteht, nur dann eine genügende, wenn der Beweis richtig ist, d. h. wenn er sowohl materiell als formell ohne Fehler ist. Für die Lehrsätze, welche eine positive Wahrheit enthalten oder zu der Form allgemein bejahender Sätze*) gehören, gibt es zwei Formen von Beweisen, den direkten und den indirekten Beweis. Die materielle und formelle Richtigkeit des erstern besteht darin, daß nachgewiesen wird, die im Lehrsatze ausgesprochene Behauptung folge aus schon erkannten Wahrheiten nach den nothwendigen und angeborenen Gesetzen des Denkens, die des letztern aber darin, daß gezeigt wird, die Annahme, die Behauptung sei unwahr, würde nach den nothwendigen Gesetzen des Denkens zu Folgerungen führen, welche mit schon erkannten Wahrheiten in direktem Widerspruche stehen.

Die Aufgabe dagegen verlangt die Darstellung einer Figur, welche gegebene Bedingungen erfülle, und der Satz, welcher dieses Verlangen ausspricht, heißt die Aufgabe im engern Sinne und ist somit der erste Theil alles dessen, was zu einer vollständigen Aufgabe mit Lösung gehört. Daraus ergibt sich zunächst als zweiter Theil der Aufgabe die Nachweisung, auf welche Weise eine solche Figur dargestellt werde, die

*) Die allgemein verneinenden Sätze übergehen wir hier, da sie in der Wissenschaft aus dem in §. 1 bezeichneten Grunde nur selten vorkommen, und da wir überhaupt den Lehrsatz nur etwas näher betrachten, insofern er eine Parallele zur Aufgabe bildet.

Digitized by Google

sogenannte Konstruktion. Nun bedarf es aber ebenso wie bei dem Lehrsatze der wissenschaftlichen Begründung, daß durch die Konstruktion wirklich die in der Aufgabe ausgesprochenen Forderungen erfüllt werden; folglich erscheint als dritter Theil der Aufgabe der Beweis, welcher aus Gründen, deren nähere Entwicklung einer andern Wissenschaft, der Logik, zukommt, beinahe durchweg ein direkter sein wird. Endlich verlangt in vielen Fällen die Vollständigkeit für die Aufgabe noch einen vierten Bestandtheil. Aus Konstruktion nemlich und Beweis ergibt sich nicht selten, daß die Bedingungen zur Lösung einer Aufgabe nicht in allen Fällen so zusammenstimmen, daß die verlangte Figur wirklich konstruirt werden kann. So z. B. kann ein Dreieck allerdings konstruirt werden, wenn die drei Seiten desselben oder eine Seite und zwei Winkel gegeben sind. Aber aus bekannten geometrischen Sätzen können die drei Seiten nicht von willkürlicher Größe sein, sondern es muß die Summe von je zweien derselben immer größer sein als die dritte; ebenso muß im zweiten Falle die Summe der beiden gegebenen Winkel kleiner sein als 180°, wenn ein Dreieck möglich sein soll. Die Angabe nun, in welchem Verhältnisse je eine der gegebenen Bedingungen zu den übrigen stehen müsse, damit die Lösung möglich sei, bildet den vierten Hauptbestandtheil einer vollständigen Aufgabe, und heißt Determination.

---

§. 3.

Von der Aufgabe im engern Sinne.

Die Aufgabe im engern Sinne hat wieder zwei Hauptbestandtheile, sie spricht erstens aus, was konstruirt werden soll, und gibt zweitens die Bedingungen an, unter denen das Gesuchte gefunden werden soll, wobei es sich zunächst von selbst versteht und daher kaum bemerkt zu werden braucht, daß die gegebenen Bedingungen und das Gesuchte so im Zusammenhang zu einander stehen müssen, daß das Gesuchte wirklich eine Folge des Gegebenen ist, und daher auch aus ihm wirklich abgeleitet werden kann.

Digitized by Google

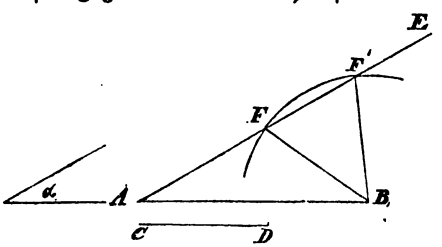
Vor Allem ist hier auf die eigenthümliche sprachliche Form aufmerksam zu machen, in welcher die Aufgabe ausgesprochen wird. Es ist die Form des Infinitivs: ein Dreieck zu konstruiren, welches u. s. w., einen Kreis zu beschreiben, welcher u. s. w. Diese sonst seltene Satzbildung, bei welcher der den Infinitiv regierende Hauptsatz fehlt, ist natürlich elliptisch, und fordert als Ergänzung den Vordersatz: es ist die Aufgabe gegeben, es wird verlangt, oder ähnliches.

Die Aufgaben selbst zerfallen in zwei Hauptklassen, in bestimmte und unbestimmte. Eine Aufgabe heißt bestimmt, wenn eine beschränkte, endliche, durch die Konstruktion genau zu bestimmende Anzahl von Auflösungen möglich ist, d. h. wenn eine beschränkte und endliche Anzahl von Figuren konstruirt werden kann, welche der Aufgabe genügen, und nach Form oder Größe oder nach beiden von einander verschieden sind; unbestimmt dagegen, wenn zur Lösung der Aufgabe unendlich viele von einander nach Form oder Größe oder nach beiden verschiedene Figuren gefunden werden können. Die Aufgabe z. B., auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie als Grundlinie ein gleichschenkliges oder auf ihr als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, ist eine unbestimmte, weil in beiden Fällen unendlich viele gleichschenklige oder rechtwinklige Dreiecke konstruirt werden können, welche die gegebene gerade Linie zur Basis oder zur Hypotenuse haben, und sowohl nach Form als auch nach Größe von einander verschieden sind, d. h. einander weder ähnlich noch gleich sind; dagegen ist die Aufgabe, auf einer gegebenen geraden Linie als Grundlinie ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, eine bestimmte, indem sämmtliche gleichschenklige und zugleich rechtwinkliche Dreiecke, deren Grundlinien die gegebene Größe haben, einander kongruent, d. h. sowohl der Form als auch der Größe nach einander gleich sind, und nur etwa nach der Lage von einander unterschieden sein können. Ebenso ist die Aufgabe, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe gegeben ist, eine unbestimmte, da nach der gegebenen Bedingung wieder unendlich viele Dreiecke konstruirt werden können, welche zwar sämmtlich

Digitized by Google

der Form nach einander gleich, d. h. einander ähnlich, aber in der Größe von einander verschieden sind. Endlich ist die Aufgabe, ein Dreieck zu konstruiren, von welchem die Grundlinie und Höhe gegeben sind, unbestimmt, weil wieder unendlich viele Dreiecke möglich sind, welche zwar in diesem Falle der Größe nach gleich, aber der Form nach von einander verschieden oder einander nicht ähnlich sind.

Wenn bisweilen der Begriff der bestimmten Aufgabe so festgestellt wird, daß darunter nur solche Aufgaben verstanden werden, für welche nur eine einzige Auflösung möglich ist, oder, was einerlei ist, bei welcher sämmtliche zur Lösung dienende Figuren, sowohl nach Form als auch nach Größe gleich, also kongruent und nur nach der Lage von einander verschieden sind, so ist dieß nicht ganz richtig. Wie in der Algebra nur eine bestimmte Gleichung des ersten Grades eine einzige Auflösung hat, jede bestimmte Gleichung des zweiten, dritten, vierten ꝛc. überhaupt des nten Grades aber 2, 3, 4 ꝛc. überhaupt n Auflösungen oder Wurzeln hat, ohne daß sie dadurch aufhört eine bestimmte Gleichung zu sein, so ist dieß auch in der Geometrie der Fall. Eine Aufgabe hört nicht auf, eine bestimmte zu sein, auch wenn ihre Lösung durch mehrere nach Form und Größe von einander verschiedene Figuren geschieht, sobald nur die Zahl dieser Figuren eine endliche ist. Die Aufgabe z. B. ein Dreieck zu konstruiren, von welchem zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind, ist eine bestimmte Aufgabe, und gibt doch zwei nichtkongruente Dreiecke. Denn es seien z. B. AB, CD die beiden gegebenen Seiten, und α der CD gegenüberliegende Winkel, so lege an AB in A einen Winkel BAE = α an, und beschreibe von B als Mittelpunkt mit CD als Halbmesser einen Kreisbogen, der AE in F oder F′ trifft; ziehe endlich BF oder BF′, so ist sowohl △ ABF als auch △ ABF′ das verlangte, weil sowohl im ersten Dreiecke AB = AB, BF = CD und der gegen-



Digitized by Google

überliegende Winkel BAF = α, als auch im zweiten AB = AB, BF′ = CD und BAF′ = α ist. Die algebraische Behandlung der Aufgabe würde auch wirklich auf eine bestimmte Gleichung des zweiten Grades führen.

Die Aufgabe einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt, hat acht Lösungen, d. h. es gibt acht von einander verschiedene Kreise, welche den Forderungen der Aufgabe genügen, und demungeachtet gehört sie zu den bestimmten Aufgaben, weil aus der Natur der Aufgabe selbst heraus die Zahl der Lösungen als eine endliche sich ergibt, wie auch die algebraische Lösung auf eine (in quadratische Gleichungen zerfällbare) Gleichung vom 8ten Grade führt. Bezeichnen wir nemlich die drei gegebenen Kreise mit A, B, C, so kann bei jedem dieser Kreise entweder eine äußere oder eine innere Berührung stattfinden. Bezeichnen wir demgemäß die äußere Berührung des gesuchten Kreises mit dem Kreise A durch Aa, die innere durch Ai (wobei es für den letzten Fall einerlei bleibt, ob der Kreis A oder der gesuchte Kreis der von dem andern eingeschlossene ist), und ebenso für die Kreise B und C die beiden Arten von Berührungen beziehungsweise durch Ba, Bi, Ca, Ci, so finden folgende acht Fälle statt, durch welche aber die überhaupt möglichen Kombinationen vollständig erschöpft sind.

1) Aa, Ba, Ca, d. h. der gesuchte Kreis berührt alle drei Kreise von Außen.
2) Aa, Ba, Ci, d. h. er berührt die beiden ersten Kreise von Außen, den dritten von Innen.
3) Aa, Bi, Ca.
4) Ai, Ba, Ca.
5) Aa, Bi, Ci.
6) Ai, Ba, Ci.
7) Ai, Bi, Ca.
8) Ai, Bi, Ci.

Eine Aufgabe ist also eine bestimmte, wenn die zu ihrer Lösung konstruirbaren Figuren entweder sämmtlich nach Form und Größe einander gleich, also kongruent, und nur nach der Lage von einander verschieden sind, oder wenn zwar mehrere nach Form und Größe von einander verschiedene Figuren der Aufgabe Genüge

Digitized by Google

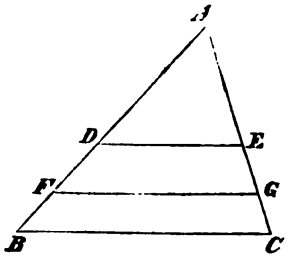
leisten, wenn aber die Anzahl dieser verschiedenen Figuren eine endliche, bei der Lösung selbst zu bestimmende ist.

Fragen wir nun weiter, wann eine geometrische Aufgabe bestimmt, und wann sie unbestimmt sei, so zeigt sich auch hier eine interessante Parallele zwischen den geometrischen und den algebraischen Aufgaben. Wie in der Algebra eine Aufgabe dann bestimmt ist, wenn zu ihrer Lösung so viele von einander unabhängige Gleichungen gegeben sind, als unbekannte Größen gesucht werden, dieselbe Aufgabe aber zur unbestimmten wird, sobald die Zahl der Gleichungen kleiner wird als die Zahl der unbekannten Größen, so findet ein ganz analoges Verhältniß bei den geometrischen Aufgaben statt. Jede Figur erfordert zu ihrer Konstruktion eine bestimmte Anzahl von Bedingungen, um selbst als vollkommen bestimmt gelten zu können, und sobald die Zahl von Bedingungen kleiner ist, läßt die Aufgabe unendlich viele Lösungen zu, oder sie wird unbestimmt. Es ist von Wichtigkeit, sich eine Uebersicht über die Anzahl von Bedingungen zu verschaffen, unter welchen die Hauptklassen von Aufgaben wirklich als bestimmt betrachtet werden können. Das Folgende soll daher eine Zusammenstellung der für jede Hauptklasse von Aufgaben erforderlichen Anzahl von Bedingungen geben. Daß dabei nur die Hauptklassen von Aufgaben berücksichtigt werden können, liegt in der Natur der Sache, da die Zahl aller möglichen Aufgaben unendlich groß ist, und dabei die Verschiedenheit unter ihnen von der Art, daß unmöglich alle ohne Ausnahmen nur in wenige Klassen zusammengestellt werden könnten.

Die meisten Aufgaben lassen sich auf die Bestimmung von Vielecken (dieses Wort im weitern Sinne genommen, also das Dreieck mit einbegriffen) und von Kreisen zurückführen. Dieß gilt selbst oft von Aufgaben, welche nicht unmittelbar so ausgedrückt sind, und scheinbar etwas ganz anderes verlangen; z. B. die Aufgabe: durch einen gegebenen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine gerade Linie so zu ziehen, daß sie von den Schenkeln zwei Stücke abschneide, welche ein gegebenes Verhältniß haben, ist gleichbedeutend mit der Aufgabe: ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben sind ein Winkel, das Ver-

Digitized by Google

hältniß der ihn einschließenden Seiten, und ein Punkt zwischen den Schenkeln des Winkels, durch welchen die Gegenseite gehen soll. Ebenso ist die Aufgabe, ein Dreieck ABC durch Parallelen mit einer Seite BC desselben in 3 gleiche Theile zu theilen, gleichbedeutend mit der andern: ein Dreieck zu konstruiren, von welchem zwei Winkel und der Flächeninhalt gegeben sind; denn wenn die Parallelen DE, FG sind,



so ist △ ADE ∽ △ ABC und = $^1/_3$ △ ABC, ebenso △ AFG ∽ △ ABC und = $^2/_3$ △ ABC, also ist von jedem dieser Dreiecke der Flächeninhalt sowie die Winkel bekannt. Die Aufgaben: einen Punkt zu finden, der von drei gegebenen Punkten oder von drei gegebenen geraden Linien, oder von zwei Punkten und einer geraden Linie ꝛc. gleichweit entfernt ist, fallen auf gleiche Weise zusammen mit den Aufgaben: einen Kreis zu beschreiben, der durch drei gegebene Punkte geht, oder der drei gegebene gerade Linien berührt, oder der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gerade Linie berührt ꝛc., denn der Mittelpunkt des durch die letztere Aufgabenreihe bestimmten Kreises ist der in der ersten Reihe geforderte Punkt.

Betrachten wir nun die für die Vielecke und den Kreis zur vollständigen Bestimmung erforderlichen Bedingungen genauer, und zwar:

1) Das Dreieck.

Die ebene Geometrie zeigt, daß von den sechs Stücken, aus welchen ein Dreieck besteht, nur drei gegeben sein dürfen, um das Dreieck vollständig zu bestimmen. Denn nach den Sätzen über die Kongruenz der Dreiecke sind zwei Dreiecke kongruent, wenn entweder die drei Seiten oder zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel oder eine Seite und zwei gleichliegende Winkel in beiden Dreiecken einander gleich sind. Diese Fundamentalsätze über die Kongruenz der Dreiecke könnten noch durch eine unzählige Menge anderer Sätze vermehrt werden, wenn statt der unmittelbar zum Dreiecke gehörigen einzelnen

Digitized by Google

Stücke andere im oder am Dreiecke gezogene gerade Linien oder Summen oder Differenzen solcher Linien als gleich gegeben wären; wie z. B. die Anhänge zu meinem Lehrbuche der ebenen Geometrie beispielsweise folgende Kongruenzsätze enthalten:

a. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Winkel und der Umfang des einen gleich sind den entsprechenden Stücken des andern.

b. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn eine Seite ein anliegender Winkel und die Summe der beiden andern Seiten des einen gleich sind den entsprechenden Stücken des andern.

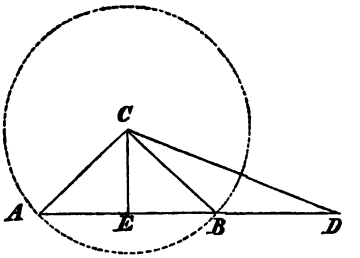
(Anhang zu I. und II. Buch Nr. 12. 13.)

Aehnliche Kongruenzsätze können gebildet werden unter Beiziehung der Höhenperpendikel, der von den Winkelspitzen nach den Halbirungspunkten der Gegenseiten gezogenen Transversalen, der Halbmesser der in das Dreieck oder um dasselbe oder an dasselbe (d. h. so, daß eine Seite selbst und die Verlängerungen der beiden andern berührt werden) beschriebenen Kreise, der Flächeninhalte, sowie überhaupt aller denkbaren Kombinationen von Größen, welche mit dem Dreiecke in irgend einer Verbindung stehen.

Allerdings gibt es auch Fälle, daß drei Stücke in zwei Dreiecken gleich sind, ohne daß die Kongruenz der Dreiecke daraus gefolgert werden kann. Ich meine damit nicht solche Bedingungen, wie z. B. die, daß die drei Winkel des einen gleich seien den drei Winkeln des andern, indem hier zwar scheinbar drei Stücke als gleich gegeben sind, in der That aber nur zwei, da der dritte Winkel durch die beiden ersten ohnehin schon gegeben ist nach dem bekannten Satze, daß die Summe der drei Winkel in jedem Dreiecke $= 180^0$ ist. Ich meine wirklich Fälle, in welchen drei von einander unabhängige Bedingungen gegeben sind, ohne daß nothwendig Kongruenz erfolgte. Ein solcher Fall ist z. B. der bekannte schon früher berührte, daß in zwei Dreiecken zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gleich sind. Wenn von dem gleichschenkligen Dreiecke ABC die Grundlinie AB beliebig verlängert, und von einem beliebigen Punkte D aus

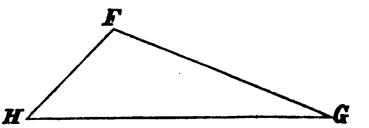
Digitized by Google

auf der Verlängerung eine gerade Linie DC nach der Spitze des Dreiecks ABC gezogen wird, so erhält man zwei Dreiecke ADC und BDC, die offenbar nicht kongruent sind, obgleich sie die genannten Bedingungen haben, nemlich CD = CD, CA = CB, und CDA = CDB, welche letztern Winkel wirklich den gleichen Seiten CA und CB gegenüber liegen.



Fällen wir ferner von C auf AB das Perpendikel CE, so sind die beiden Dreiecke CAD und CBD auch von der Art, daß in ihnen zwei Seiten und das zur dritten Seite gehörige Höhenperpendikel gleich sind, nämlich CD = CD, CA = CB, und CE = CE, ohne daß die Dreiecke kongruent sein müssen, so daß auch die ebengenannten Bedingungen nicht nothwendig auf Kongruenz führen.

In beiden Fällen jedoch läßt sich zeigen, daß alle Dreiecke, welche die nemlichen drei Stücke haben (d. h. entweder die nemlichen zwei Seiten und den einer dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel, oder statt des letztern das zur dritten Seite gehörige Höhenperpendikel), entweder dem Dreiecke ACD oder dem Dreiecke BCD kongruent sein müssen. Denn hat man irgend ein Dreieck FGH, von welchem bekannt ist, daß FG = CD, FH = CA und FGH = CDA ist, so läßt sich △ FGH so auf △ ACD legen,



daß F auf C und FG in der Richtung auf CD fällt; daher muß G auf D fallen, weil FG = CD ist. Nun fällt GH in der Richtung auf DA, weil FGH = CDA ist, also liegt H irgendwo auf DA oder seiner Verlängerung. Da nun F auf C liegt, und FH = CA ist, also H ebensoweit von C entfernt ist, als A, so liegt H auf dem von C als Mittelpunkt mit CA als Halbmesser beschriebenen Kreise; folglich liegt H auf dem Durchschnitte der geraden Linie DA mit diesem Kreise, also entweder

Digitized by Google

in A oder in B, da ein Kreis und eine gerade Linie einander nur in zwei Punkten schneiden können, also der von C als Mittelpunkt mit CA als Halbmesser beschriebene Kreis die gerade Linie AD nur noch in B schneiden kann, aber auch dort schneiden muß, weil CB = CA ist. △ FGH deckt also entweder △ ACD oder △ BCD, und ist folglich dem einen oder dem andern kongruent. — Ein ähnlicher Beweis ergibt sich für den zweiten Fall.

Wenn also drei — von einander nicht abzuleitende, sondern von einander unabhängige — Bedingungen gegeben sind, so sind entweder sämmtliche Dreiecke, an welchen sich diese Bedingungen finden, kongruent, oder sie zerfallen wenigstens in eine bestimmte Zahl von Gruppen kongruenter Dreiecke.

Es folgt daraus, daß bei Dreiecksaufgaben jede Aufgabe als bestimmt betrachtet werden kann, sobald drei von einander unabhängige Bedingungen gegeben sind. Denn in diesem Falle sind alle konstruirten Dreiecke entweder nur der Lage nach von einander verschieden, aber sämmtlich nach Form und Größe einander gleich, oder es gibt eine endliche durch die Auflösung selbst zu bestimmende Anzahl von verschiedenen Figuren, welche den Bedingungen Genüge leisten.

Es ergibt sich ferner aus dem Bisherigen, daß die besondern Arten von Dreiecken weniger als drei Bedingungen erfordern. So erfordert:

α) das gleichschenklige Dreieck nur zwei Bedingungen, indem eine Bedingung schon darin enthalten ist, daß das Dreieck gleichschenklig sein soll, also zwei Seiten desselben einander gleich werden sollen.

β) das rechtwinklige Dreieck bedarf ebenfalls nur zwei Bedingungen, da schon die Größe eines Winkels = 90° als eine Bedingung gegeben ist.

γ) das gleichschenklige und rechtwinklige Dreieck bedarf folglich nur noch einer einzigen Bedingung, da durch die Bezeichnung desselben als eines gleichschenkligen schon eine und durch seine Bezeichnung als eines rechtwinkligen eine zweite Bedingung gegeben ist. Endlich bedarf

Digitized by Google

δ) das gleichseitige Dreieck ebenfalls nur noch einer einzigen Bedingung, da schon zwei dadurch gegeben sind, daß die erste Seite sowohl der zweiten als auch der dritten gleich sein soll.

2) Das Viereck.

Jedes Viereck läßt sich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen; jedes dieser beiden Dreiecke ist ferner nach dem Vorigen durch drei Bedingungen vollkommen bestimmt; mithin sind beide Dreiecke zusammen oder das ganze Viereck durch sechs Bedingungen bestimmt. Da nun aber beide Dreiecke eine Seite gemeinschaftlich haben, nemlich die genannte Diagonale des Vierecks, so ist durch die Bestimmung des ersten Dreiecks schon eine Seite des zweiten gegeben, und es bedarf also für dieses zweite Dreieck nur noch zwei weitere, also für das Viereck im Ganzen fünf Bedingungen. Viereckaufgaben sind daher bestimmt durch fünf von einander unabhängige Bedingungen.

Wie sich für die besondern Arten von Dreiecken die Zahl der für das Dreieck überhaupt erforderlichen drei Bedingungen auf weniger als drei verringert, so gilt Aehnliches auch für die besondern Arten von Vierecken; nemlich

α) das Trapez bedarf nur vier Bedingungen, da in der Bestimmung, das Viereck soll ein Trapez sein, schon die Bedingung liegt, es sollen zwei gegenüberliegende Seiten parallel sein. Folglich bedarf

β) das gleichseitige Trapez, d. h. dasjenige Trapez, in welchem die beiden nichtparallelen Seiten einander gleich sind (auch Antiparallelogramm genannt*), nur noch drei Bedingungen, da schon eine der für das Trapez überhaupt erforderlichen Bedingungen in der Bestimmung liegt, daß das Trapez gleichseitig sein soll. Ebenso bedarf

γ) das Kreisviereck, d. h. dasjenige Viereck, um welches sich ein Kreis so beschreiben läßt, daß dessen Peripherie durch alle vier Winkelspitzen hindurch geht, auch nur vier Bedingungen, da nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie

*) Manche Mathematiker nennen es auch unrichtig Paralleltrapez, als ob es paralleler wäre als die übrigen Trapeze.

Digitized by Google

durch die Bezeichnung: Kreisviereck, die Bedingung gegeben ist, daß die Summe zweier Gegenwinkel der Summe beider andern gleich, oder, was einerlei ist, daß diese Summe = 180° sein soll.

δ) das Parallelogramm verlangt noch drei Bedingungen, indem zwei Bedingungen durch die Forderung gegeben sind, daß beide Paare von Gegenseiten aus Parallelen bestehen sollen. Von den besonderen Arten von Parallelogramm erfordert daher

ε) das gleichseitige Parallelogramm noch zwei Bedingungen, da in der Bezeichnung des Parallelogramms als eines gleichseitigen schon eine weitere Bedingung, aber auch nur eine einzige gegeben ist, wenn gleich verlangt ist, daß alle vier Seiten einander gleich sein sollen; denn letzteres hängt nur von der Gleichheit zweier neben einander liegender Seiten ab, da die gegenüberliegenden Seiten ohnehin bei allen Parallelogrammen einander gleich sind. Es spricht daher obige Bezeichnung nur die einzige Bedingung aus, daß das eine von den beiden (in allen Parallelogrammen) gleichen Seitenpaaren dem andern gleich sein soll.

ζ) das rechtwinklige Parallelogramm oder das Rechteck erfordert aus gleichem Grunde ebenfalls nur zwei Bedingungen, da die Bestimmung, das Parallelogramm soll rechtwinklig sein, eine von den drei für das Parallelogramm überhaupt erforderlichen Bedingungen enthält, aber auch nur eine, weil nach bekannten Sätzen der Elementargeometrie alle Winkel eines Parallelogramms rechte sein müssen, sobald nur ein einziger derselben ein rechter ist.

η) das gleichseitige und rechtwinklige Parallelogramm endlich, oder das Quadrat erfordert nur noch eine einzige Bedingung, da zwei Bedingungen in den Bezeichnungen des Parallelogramms als eines gleichseitigen und als eines rechtwinkligen eingeschlossen sind.

3) Das Vieleck.

Um die Zahl der Bedingungen zu finden, durch welche eine Aufgabe bestimmt ist, welche die Konstruktion eines Vielecks

Digitized by Google

von n Seiten oder eines Necks verlangt, gehen wir davon aus, daß jedes Neck durch Diagonalen in n—2 Dreiecke zerlegt werden kann. Von diesen Dreiecken bedarf nur das erste 3 Bedingungen, die übrigen, also n—3 Dreiecke bedürfen dagegen nur je 2 Bedingungen, da für jedes derselben durch die Bestimmung des vorangehenden schon eine Bedingung, nemlich die gemeinschaftliche Seite, gegeben ist. Sämmtliche n—3 Dreiecke bedürfen daher 2 (n—3) = 2 n—6 Bedingungen. Da nun diese Zahl durch die Bedingungen für das erste Dreieck sich noch um 3 vermehrt, so ist die Gesammtzahl aller für ein Neck erforderlichen Bedingungen 2 n—6 + 3 = 2n—3 Bedingungen, d. h. die Zahl der Bedingungen, durch welche irgend ein Vieleck bestimmt ist, beträgt drei weniger als die doppelte Seitenzahl des Vielecks. Wenn diese Stücke unmittelbar Seiten oder Winkel des Vielecks sind, so ergibt sich daraus, daß jedes Vieleck bestimmt ist, wenn seine sämmtlichen Seiten und Winkel mit Ausnahme von dreien dieser Stücke gegeben sind.

4) Der Kreis.

Nach den Lehrsätzen der ebenen Geometrie läßt sich durch drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, immer ein Kreis beschreiben, aber nur ein einziger. Folglich ist ein Kreis, so bald seine Bestimmung von der Peripherie ausgeht, durch drei Bedingungen vollkommen bestimmt. Ist aber der Mittelpunkt des Kreises gegeben, so bedarf es außer dieser Bedingung nur noch eines einzigen Punktes auf der Peripherie, indem mit diesem Punkte zugleich der Halbmesser des Kreises gegeben ist. Wenn daher die Bestimmung des Kreises vom Mittelpunkte ausgeht, so bedarf es außer dieser Bedingung nur noch einer einzigen, also für diesen Fall im ganzen zwei.

Wenn im Bisherigen die nothwendige Zahl von Bedingungen angegeben ist, unter welchen eine Aufgabe als bestimmt betrachtet werden kann, so muß jetzt noch besonders herausgehoben werden, daß zur Lösung einer Aufgabe nicht mehr als die für jeden besondern Fall angegebene Zahl von Bedingungen gegeben sein darf, wenn die Aufgabe wirklich unter allen Um-

Digitized by Google

ständen soll gelöst werden können. Hat die Aufgabe mehr Bedingungen als nöthig sind, so heißt sie *überbestimmt*, und es ist ein reiner Zufall, wenn eine solche Aufgabe wirklich so lösbar ist, daß die erhaltene Figur allen Bedingungen entspricht. So ist z. B. das rechtwinklige Dreieck nach dem Obigen durch zwei Bedingungen bestimmt. Soll daher ein rechtwinkliges Dreieck konstruirt werden, von welchem beide Katheten und der zu der Hypotenuse gehörige Höhenperpendikel gegeben sind, so sind die beiden ersten Bedingungen vollkommen genügend zur Bestimmung des Dreiecks, indem sämmtliche rechtwinklige Dreiecke, welche die gegebenen Katheten haben, einander kongruent sind. Es ist daher der gegebene Höhenperpendikel von den gegebenen Katheten so abhängig, daß er von einer ganz bestimmten Größe sein muß, wenn das konstruirte Dreieck wirklich ihn soll enthalten können. Dann ist es aber überflüssig, daß er gegeben ist. Hat er aber irgend eine andere Größe, so ist es unmöglich, ein Dreieck zu konstruiren, in welchem sämmtliche gegebene Bedingungen vereinigt wären. Es gibt also nur ein einziges Verhältniß der gegebenen Stücke zu einander, in welchem obige Aufgabe lösbar ist, aber unendlich viele Verhältnisse, in welchen sie unlösbar bleibt. *Ueberbestimmte Aufgaben sind folglich in der Regel als unlösbar zu betrachten.*

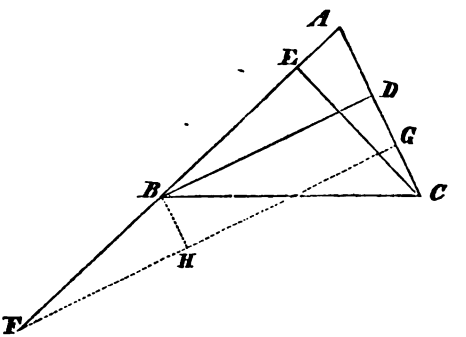
Endlich muß noch besonders herausgehoben werden, was schon oben angedeutet wurde, daß die zur Lösung einer Aufgabe gegebenen Bedingungen von *einander unabhängig* sein müssen. Eine Bedingung nemlich ist von den andern dann unabhängig, wenn sie nicht aus ihnen abgeleitet werden kann, sondern jede beliebige — allerdings oft, wie die Bemerkungen über die Determination zeigen werden, innerhalb bestimmter Grenzen eingeschlossene — Größe haben darf, die übrigen Bedingungen mögen eine Größe haben, welche sie wollen. Die Abhängigkeit ergibt sich oft ganz einfach aus bekannten Lehrsätzen; z. B. von den drei Winkeln eines Dreiecks ist der dritte von den beiden übrigen abhängig, da ihre Summe = 180° ist; ebenso ist in einem rechtwinkligen Dreiecke die von der Spitze des rechten Winkels nach dem Halbirungspunkte der Hypotenuse ge-

Digitized by Google

zogene Transversale von der Größe der Hypotenuse abhängig, da jene die Hälfte von dieser sein muß. Auf gleiche Art zeigt sich bald, daß von den drei Bedingungen, welche zur Konstruktion eines Dreiecks gegeben sind, nemlich einer Seite, dem gegenüberliegenden Winkel und dem Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises, je eine von den beiden andern abhängig ist. Denn denkt man sich mit dem gegebenen Halbmesser einen Kreis beschrieben, so gehört zu dem gegebenen Winkel, da er Peripheriewinkel in diesem Kreise werden muß, eine Gegenseite von ganz bestimmter Größe, da diese nichts anderes ist, als die in dem gegebenen Kreise zu dem gegebenen Winkel als Peripheriewinkel gehörige Chorde.

Oft aber ist diese Abhängigkeit eine versteckte, da sie auf weniger allgemein bekannten Lehrsätzen beruht. Es werden daher nicht selten Bedingungen als von einander unabhängig betrachtet, deren Abhängigkeit sich bei näherer Untersuchung herausstellt. Es sei z. B. von einem Dreiecke zu seiner Konstruktion gegeben ein Winkel, die Summe der beiden denselben einschließenden Seiten und die Summe der beiden zu diesen Seiten gehörigen (d. h. von den gegenüberliegenden Winkelspitzen auf sie gefällten) Höhenperpendikel, so wird wohl schwerlich Jemand, der blos die gewöhnlichen Lehrbücher der ebenen Geometrie gelesen hat, durch irgend einen Lehrsatz an die Abhängigkeit der dritten Bedingung von den beiden ersten erinnert werden. Und doch findet eine solche statt, wie folgende Betrachtung zeigt.

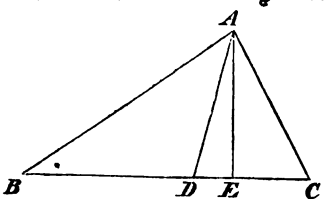
In △ ABC seien von den Winkelspitzen B und C auf die Gegenseiten AC und AB die Perpendikel BD und CE gefällt. Verlängere AB über B hinaus so nach F, daß BF = AC wird, und fälle von F auf AC oder dessen Verlängerung



Digitized by Google

den Perpendikel FG, welcher || BD ist; endlich ziehe BH || AC, so ist △ FBH ≅ △ ACE, weil BF = AC, FBH = CAE und BHF = AEC = 90° ist. Daher ist FH = CE; da ferner HG = BD, weil BDGH ein Parallelogramm ist, so ist FG = BD + CE. Nun ist aber AF = AB + AC, und es ist in dem bei G rechtwinkligen Dreiecke AFG von den drei Stücken FAG, AF, FG durch zwei derselben das dritte gegeben, d. h. die Größe jedes einzelnen dieser drei Stücke ist von der Größe der beiden übrigen abhängig; daher ist auch in dem Dreiecke ABC die Größe jedes einzelnen der drei Stücke BAC, AB + AC und BD + CE von der Größe der beiden übrigen abhängig.*) Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß das nemliche Verhältniß stattfinde, wenn die gegebenen drei Stücke eines Dreiecks ein Winkel, die Differenz der einschließenden Seiten und die Differenz der dazu gehörigen Höhenperpendikel sind.

Fügen wir noch zwei weitere Fälle hinzu. Es seien zur Konstruktion eines Dreiecks ABC gegeben das in das Dreieck fallende Stück AD der Halbirungslinie eines Winkels BAC, der von der Spitze dieses Winkels auf die Gegenseite BC gefällte Perpendikel AE und die Differenz der Winkel ACB und ABC an derselben Seite BC, so ist durch AD und AE das rechtwinklige Dreieck ADE vollkommen bestimmt, mithin auch der Winkel DAE. Nun ist aber in △ AEC



ACE + CAE = 90°, also ACE + CAD = 90° + DAE;

ebenso ist in △ ABE

ABE + BAE = 90°, also ABE + BÂD = 90° — DAE;

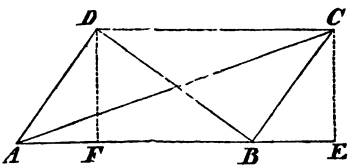
mithin, wenn die zweite Gleichung von der ersten abgezogen und dabei berücksichtigt wird, daß BAD = CAD ist, ACE — ABE = 2 DAE. Da nun durch AD und AE der Winkel DAE gegeben ist, so ist auch 2 DAE, d. h. ACE — ABE gegeben, oder die Differenz dieser beiden Winkel ist vollständig von AD und AE abhängig.

*) Obige Figur bekommt eine andere Gestalt, wenn der Winkel BA stumpf ist, die Entwicklung aber wird analog.

Digitized by Google

Es seien ferner zur Konstruktion eines Parallelogramms gegeben der Flächeninhalt, die Differenz der Quadrate beider Diagonalen und ein Winkel, so wird bei der Verschiedenartigkeit der gegebenen Bedingungen wohl Niemand ohne nähere Untersuchung auch nur ahnen, daß eine derselben von den beiden andern abhängig sei; und doch ist dieß der Fall, wie folgende Betrachtung zeigt.

In dem Parallelogramm ABCD, dessen Diagonalen AC und BD sind, und wobei AC > BD angenommen werde, fälle von C und D auf AB und seine Verlängerung die Perpendikel CE und DF.



Nun ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \cdot BE$, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\,AB \cdot AF$, folglich, da $BC = AD$, und $\triangle BCE \cong \triangle ADF$, also $BE = AF$ ist, $AC^2 - BD^2 = 4\,AB \cdot AF$.

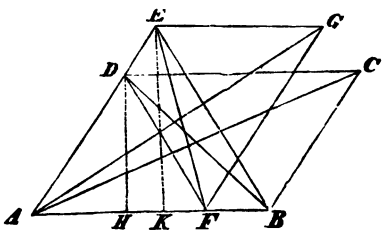
Bezeichnet man ferner den Flächeninhalt von ABCD mit f, so ist $f = AB \cdot DF$; es ist daher
$f : AC^2 - BD^2 = AB \cdot DF : 4\,AB \cdot AF = DF : 4\,AF$;
oder $f : \frac{1}{4}(AC^2 - BD^2) = DF : AF$. Wenn daher f und $AC^2 - BD^2$, also auch $\frac{1}{4}(AC^2 - BD^2)$ gegeben ist, so ist auch das Verhältniß von DF : AF gegeben; durch dieses Verhältniß aber ist das rechtwinklige Dreieck ADF wenn auch nicht nach der Größe, doch nach der Form bestimmt, da alle rechtwinkligen Dreiecke, welche das gegebene Verhältniß haben, einander ähnlich werden. Es ist somit die Größe des Winkels DAB abhängig von dem Flächeninhalte und der Differenz der Quadrate der Diagonalen.

Haben die letzteren Beispiele insbesondere gezeigt, wie versteckt oft die Abhängigkeit einer Bedingung von den übrigen sein kann, so ist jetzt noch darauf hinzuweisen, daß in allen solchen Fällen, bei welchen eine Bedingung von den übrigen abhängt, die Aufgabe entweder eine unbestimmte oder eine unmögliche ist, am häufigsten natürlich das letztere. Nehmen wir z. B. gerade den letzten Fall, es sei die Aufgabe gegeben, ein Parallelogramm zu konstruiren, von welchem der Flächeninhalt, die Differenz der

Digitized by Google

Quadrate beider Diagonalen und ein Winkel gegeben sind, so würden an und für sich die Bedingungen der Zahl nach genügen, da nach dem Früheren zur Konstruktion eines Parallelogramms drei Bedingungen erforderlich sind. Die letzte Bedingung aber ist von den beiden andern, wie nachgewiesen wurde, abhängig; folglich kann, wenn die beiden ersten Bedingungen einmal der Größe nach gegeben sind, der Winkel nicht mehr willkürlich genommen werden, sondern er muß eine ebenfalls bestimmte Größe haben. Einem einzigen Falle also, in welchem die drei gegebenen Bedingungen in einer Figur sich vereinigen lassen, stehen unendlich viele Fälle gegenüber, in welchen diese Vereinigung und somit die Lösung der Aufgabe unmöglich ist.

Gesetzt nun aber, es fände zufällig der erste Fall statt, und es sei der Winkel genau von der Größe gegeben, welche erforderlich ist, um mit den beiden andern Bedingungen zusammenzustimmen, so sind die gegebenen Bedingungen nicht als drei, sondern nur als zwei zu betrachten, und es lassen sich daher auch unendlich viele Parallelogramme konstruiren, welche den gegebenen Bedingungen Genüge leisten, wie sich leicht aus folgender Betrachtung ergibt. Es sei ABCD ein Parallelogramm, welches die verlangten Eigenschaften habe, d. h. dessen Flächeninhalt gleich dem gegebenen = f sei, bei dem die Differenz der Quadrate der Diagonalen $AC^2 - BD^2$ ebenfalls die gegebene Größe = d^2 habe, und dessen Winkel BAD endlich dem gegebenen Winkel α gleich sei, so lassen sich noch unendlich viele Parallelogramme konstruiren, welche die nemlichen drei Bedingungen erfüllen. Verlängere z. B. AD beliebig nach E, ziehe BE und durch D eine Parallele mit BE, bis diese AB in F trifft; endlich ziehe durch E und F Parallelen mit AB und BC, bis sich dieselben in G schneiden, so ist AFGE eines dieser Parallelogramme. Denn ziehe AG, FE, und fälle von D und E auf AB die Perpendikel DH, EK, so ist EAF = DAB = α;



Digitized by Google

ferner da DF ‖ EB ist, so ist △ DEF = △ DBF, also auch △ AEF = △ ADB, folglich auch 2 △ AEF = 2 △ ADB, d. h. AFGE = ABCD = f. Endlich ist wie oben $AC^2 - BD^2 = 4\ AB\ .\ AH$ und auf gleiche Weise $AG^2 - FE^2 = 4\ AF\ .\ AK$. Nun ist aber, weil DF ‖ EB, und DH ‖ EK ist, AB : AF = AE : AD = AK : AH, also AF . AK = AB . AH und daher auch 4 AF . AK = 4 AB . AH d. h. $AG^2 - FE^2 = AC^2 - BD^2 = d^2$.

Aehnliche Betrachtungen können in allen Fällen angestellt werden, in welchen eine Bedingung von den andern abhängig ist, und es ist somit das Schlußresultat folgendes: Wenn bei einer Aufgabe zwar die erforderliche Zahl von Bedingungen gegeben ist, wenn aber eine dieser Bedingungen von den übrigen abhängt, so ist die Aufgabe entweder unmöglich oder unbestimmt. In der Regel findet der erstere Fall statt.

---

§. 4.

Von der Konstruktion.

Der Zweck derselben ist, aus den gegebenen Stücken durch Zeichnung die gesuchten zu finden. Sie hängt aufs genaueste mit der in dem folgenden (zweiten) Buche zu untersuchenden geometrischen Analysis zusammen, weßwegen hier nur einige praktische Bemerkungen über die Ausführung der Zeichnungen gegeben werden können, während die wissenschaftlichen Untersuchungen mit denen über die geometrische Analysis verbunden werden müssen.

Vor Allem ist der Anfänger darauf aufmerksam zu machen, daß er sich von Anfang an streng daran gewöhne, alle Punkte, wie sie durch die Konstruktion nach und nach in der Zeichnung gefunden und festgestellt werden, auch in derselben Ordnung durch Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen. Wenn dieß auch an und für sich etwas Gleichgültiges zu sein scheint und bei

Digitized by Google

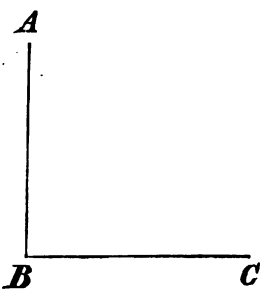
ganz einfacher Konstruktion auch unwesentlich sein möchte, so erleichtert es doch die Auffassung des Gangs einer Konstruktion bei zusammengesetzten Figuren bedeutend und gewährt hier namentlich den Vortheil, daß bei verwickelten Figuren auch später wieder eine etwa dem Bewußtsein entschwundene Konstruktion leichter ins Gedächtniß zurückgerufen wird, wenn die dazu gehörige Zeichnung noch vorhanden ist. Der bloße Anblick derselben vermag auf diese Art oft den ganzen Gang, der bei der Konstruktion genommen wurde, dadurch wieder zum Bewußtsein zu bringen, daß man den zur Bezeichnung der einzelnen Punkte dienenden Buchstaben in der Ordnung des Alphabets so folgt, wie die Punkte selbst in der Konstruktion nach einander bestimmt wurden. Darauf aber besonders aufmerksam zu machen und die konsequent durchgeführte Angewöhnung dieses Gebrauchs dem Schüler gleich von Anfang an zu empfehlen, scheint um so weniger überflüssig, als selbst manche sonst sehr brauchbare mathematische Schriften den erwähnten Punkt auffallend vernachlässigen.

Was nun die Ausführung der Konstruktion selbst betrifft, so setzt die Geometrie nur die beiden Grundforderungen voraus, man solle durch zwei Punkte eine gerade Linie ziehen und man solle von einem gegebenen Punkte als Mittelpunkt mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis beschreiben können. Alle Konstruktionen müssen daher auf diese beiden Fundamentalkonstruktionen zurückkommen, und da die erstere vermittelst des Lineals, die letztere vermittelst des Zirkels praktisch ausgeführt wird, so gestattet die strenge Konstruktionsmethode auch nur die Anwendung dieser beiden Instrumente, und verwirft den Gebrauch anderer Hilfsmittel, z. B. des Parallellineals, des Lineals zum Ziehen eines Perpendikels, des Transporteurs, des Halbirungszirkels u. dgl., indem sie die Anwendung dieser letztern Instrumente nicht mehr als wissenschaftliche, sondern nur als mechanische Konstruktion gelten läßt. Damit ist allerdings nicht ausgeschlossen, daß der Geübtere, besonders um bei verwickelteren Konstruktionen die Figuren nicht durch allzuviele Linien unklar zu machen, sich solcher Instrumente bediene, unter den Voraussetzungen, daß die wissenschaftliche Lösung von Auf-

Digitized by Google

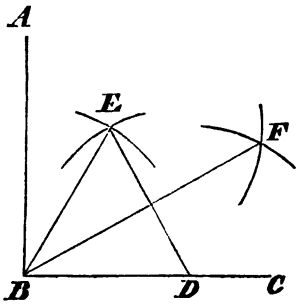
gaben, deren praktische Lösung durch ein Instrument bewerkstelligt wird, schon vorausgegangen sei, und daß die Instrumente genau und zuverlässig seien. Letzteres ist häufig nicht der Fall bei den Halbirungszirkeln und den eigentlichen Parallellinealen, weßwegen man sich dieser Instrumente zur Abkürzung der Konstruktion nicht leicht bedient, sobald auf Genauigkeit der Zeichnung Werth gelegt wird. Dagegen können rechte Winkel genau gezeichnet, oder Perpendikel genau gefällt werden, sobald man neben einem gewöhnlichen Lineale ein zweites sogenanntes Winkellineal besitzt, dessen rechter Winkel genau 90° hält; aber auch wenn letzteres nicht der Fall sein sollte, lassen sich doch Parallelen mit aller Schärfe damit ziehen.

Bei vielen Aufgaben hat man die Wahl zwischen verschiedenen Konstruktionen. Unter denselben verdient stets diejenige den Vorzug, welche entweder die einfachere ist, oder welche am meisten den uns angebornen Sinn für Symmetrie befriedigt. Häufig ist eine solche Konstruktion nicht gerade die am nächsten liegende. Nehmen wir als Beispiel die ganz elementare Aufgabe, einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen. Es sei ABC dieser Winkel. Der Schüler wird zunächst folgende Schlüsse machen: da der rechte Winkel 90° beträgt, so beträgt jedes Drittheil davon 30°; jeder Winkel im gleichseitigen Dreiecke aber hat eine Größe von 60°; legt man daher in die Spitze des rechten Winkels ein gleichseitiges



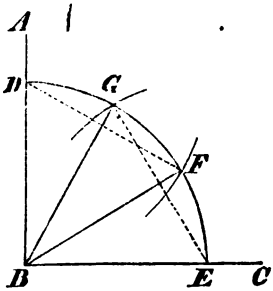
Dreieck so hinein, daß seine Grundlinie auf einen Schenkel des Winkels fällt, so wird zunächst der Winkel in zwei Theile getheilt, von denen der eine 60°, der andere 30° hält; man hat also nur noch den ersteren Winkel zu halbiren, um drei gleiche Theile, jeden zu 30°, zu erhalten. Daraus ergibt sich folgende Konstruktion: Von BC schneide ein beliebiges Stück BD ab, und beschreibe über BD ein gleichseitiges Dreieck BDE, halbire den Winkel DBE durch BF, so ist ABC durch BE und

Digitized by Google



BF in drei gleiche Theile getheilt. Denn da ABC = 90° und EBD (als Winkel in einem gleichseitigen Dreiecke) = 60° ist, so ist ABE = 30°; da ferner EBD durch BF halbirt ist, so ist EBF = 30° und FBD = 30°; also ist ABE = EBF = FBD.

Gewöhnlich aber geben die Lehrbücher der ebenen Geometrie folgende Konstruktion: Von B als Mittelpunkt beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen, der die Schenkel des Winkels in D und E schneide; von D und E als Mittelpunkten beschreibe hierauf mit dem nemlichen Halbmesser Kreisbögen, welche den ersten Kreisbogen in F und G schneiden, endlich ziehe BF und BG, so ist durch die letztern Linien der Winkel ACB in drei gleiche Theile getheilt. Denn zieht man DF, EG, so ist △ DBF gleichseitig, also DBF = 60° und daher FBE = 30°; ebenso ist △ GBE gleichseitig, also GBE = 60°, und daher DBG = 30°; folglich ist auch GBF = 30°, und daher DBG = GBF = FBE.



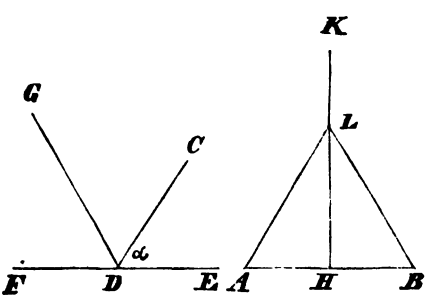
Die letztere Konstruktion ist entschieden der ersteren vorzuziehen. Sie ist zunächst einfacher, indem sie nur drei Kreisbögen und zwei gerade Linien erfordert, während man zur ersteren vier Kreisbögen und drei gerade Linien, oder wenigstens zwei bedarf, da DE nicht absolut nöthig ist. Aber auch abgesehen davon zeichnet sie sich vor jener durch Symmetrie und somit durch Eleganz aus.

Ueber die Wahl unter verschiedenen Konstruktionen lassen sich vom mathematischen Standpunkte aus keine allgemeinen Regeln geben, sondern es ist dieß Sache des Geschmacks, und die Mathematik hat in dieser Richtung ebensogut ihre Aesthetik

Digitized by Google

und ihre Schönheitsnormen, wie jeder andere Zweig des menschlichen Wissens und Thuns. Im Allgemeinen gilt nur der Gesichtspunkt, daß diejenige Konstruktion den übrigen vorzuziehen ist, welche sich vor ihnen durch Einfachheit oder Symmetrie auszeichnet.

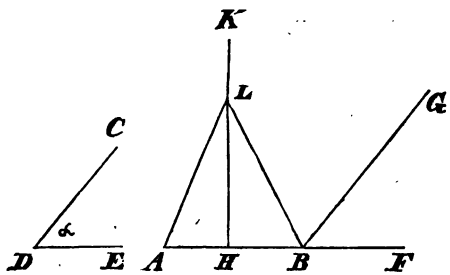
Endlich ist noch darauf hinzuweisen, daß jede Konstruktion, soweit es irgend möglich ist, in einer einzigen Figur zu vereinigen und nicht in verschiedenen Figuren zerstückelt zu geben sei; es müssen daher immer in der Hauptfigur die gegebenen Stücke unmittelbar, soweit dieß angeht, benützt, und nicht etwa solche Stücke genommen werden, die vorher in einer andern Nebenfigur aus den gegebenen abgeleitet wurden. Nehmen wir zur Erläuterung wieder eine ganz elementare Aufgabe, nemlich die Aufgabe, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Grundlinie und der Winkel an der Spitze gegeben sind. Wenn, wie dieß gewöhnlich geschieht, von dem Schüler vorher die Aufgabe gelöst worden ist, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Grundlinie und ein anliegender Winkel gegeben sind, so wird es ihm leicht sein, die vorige Aufgabe auf die letztere zurückzuführen. Er wird nemlich die Betrachtung anstellen, daß in jedem gleichschenkligen Dreiecke mit einem Winkel zugleich die übrigen gegeben seien, und daß also namentlich aus dem gegebenen Winkel an der Spitze jeder der beiden Winkel an der Grundlinie abgeleitet werden könne, indem beide letztere einander gleich seien und mit dem ersten zusammen 180° betragen, so daß also jeder Winkel an der Grundlinie halb so groß sein müsse als der Nebenwinkel des Winkels an der Spitze. Dieß wird den Schüler zunächst auf folgende Konstruktion führen. Es sei AB die Grundlinie, CDE = α der gegebene Winkel an der Spitze; verlängere einen Schenkel DE des gegebenen Winkels über D hinaus nach F, und



Digitized by Google

halbire den dadurch erhaltenen Winkel CDF durch DG; auf AB errichte im Halbirungspunkte H den Perpendikel HK, und lege an AB in A einen Winkel = FDG an, dessen Schenkel HK in L treffe; ziehe endlich BL, so ist △ ABL das gesuchte. Denn △ ABL ist gleichschenklig, weil L auf dem im Halbirungspunkte von AB errichteten Perpendikel liegt; es hat ferner die Grundlinie AB; endlich ist BAL + ABL + ALB = 180° = FDG + GDC + CDE; aber BAL = FDG, ABL = BAL = FDG = GDC; also auch ALB = CDE = α.

Diese Konstruktion ist nun zwar allerdings richtig, aber zu tadeln, weil sie zur Lösung der Aufgabe zwei Figuren erfordert, so daß das Resultat der einen Figur in die andere übergetragen werden mußte. Vorzuziehen ist daher folgende Konstruktion, abgesehen von ihrer größern Einfachheit: Verlängere AB beliebig nach F, und lege an BF in B einen Winkel FBG = α an; auf AB errichte im Halbirungspunkte H einen Perpendikel HK, und halbire ABG; es sei L der Punkt, in welchem die Halbirungslinie den Perpendikel HK treffe; ziehe AL, so ist △ ABL das gesuchte; denn es ist wieder wie oben gleichschenklig, und hat AB zur Grundlinie; da ferner LAB = ABL und ABL = LBG ist, so ist auch LAB = LBG; nun ist aber ABL + LAB + ALB = ABL + LBG + GBF; folglich ist auch ALB = GBF = α.



---

§. 5.

Von dem Beweise.

Auch über den Beweis läßt sich hier nichts Besonderes bemerken, da er so innig mit der geometrischen Analysis zu-

Digitized by Google

sammenhängt, daß er erst im folgenden Buche in dieser Richtung näher betrachtet werden kann.

Im Uebrigen unterscheidet er sich von den Beweisen der Lehrsätze nicht wesentlich, wie sich schon aus der früheren Untersuchung ergibt, nach welcher überhaupt Lehrsätze und Aufgaben im Allgemeinen nur verschiedene Ausdrucksformen der nemlichen Wahrheit sind. Der Beweis hat bei Aufgaben wesentlich die Bestimmung, zu zeigen, daß die behaupteten und in der Aufgabe geforderten Eigenschaften der durch die Konstruktion erhaltenen Figur sich mit Nothwendigkeit nach den uns angebornen Formen des Denkens und Schließens (nach den logischen Denkgesetzen) aus schon erkannten Wahrheiten ergeben muß. Es ist endlich schon oben bemerkt worden, daß von den zwei Hauptarten von Beweisen, welche in der Mathematik angewendet werden, dem directen und indirecten Beweise, vorzugsweise der erstere bei den Aufgaben vorkommen werde, was seinen Grund in tieferen logischen Gesetzen hat, deren Entwicklung der Logik zugewiesen werden muß.

---

§. 6.

Von der Determination.

Es gibt Aufgaben, welche bei jedem denkbaren Verhältnisse der gegebenen Größen zu einander konstruirbar sind; es läßt sich z. B. bei der Aufgabe, ein Dreieck zu konstruiren, von welchem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, kein Verhältniß der gegebenen zwei Linien zu einander und bei allen möglichen Verhältnissen keine Größe des Winkels denken, so daß die drei gegebenen Stücke von der Art wären, daß sie nicht an einem Dreiecke vereinigt gedacht werden könnten. Aufgaben solcher Art sind daher immer konstruirbar.

Dagegen gibt es eine große Zahl von Aufgaben, bei welchen sich solche Verhältnisse der gegebenen Stücke zu einander denken lassen, daß dieselben in der geforderten Figur nicht ver-

Digitized by Google

einigt gedacht werden können, daß vielmehr nur innerhalb bestimmter Grenzen der Verhältnisse die Konstruktion möglich ist. Es gehört zur Vollständigkeit der Behandlung einer Aufgabe, daß diese Grenzen genau angegeben werden, innerhalb welcher die Verhältnisse der Bedingungen sich befinden müssen, wenn die Konstruktion möglich bleiben soll. Diese Aufgabe heißt Determination.

Die Determination bezieht sich entweder auf die Lage oder auf die Größe der gegebenen Bedingungen. Ein Punkt z. B. kann entweder innerhalb oder außerhalb eines Kreises oder auf der Peripherie liegen. Eine vierte Möglichkeit gibt es nicht. Wenn nun die Aufgabe gegeben ist, von einem gegebenen Punkte aus eine Tangente an den Kreis zu ziehen, so ist einleuchtend, daß von den drei möglichen Fällen der Lage des Punktes nur zwei wirklich stattfinden dürfen, die Lage nemlich auf der Peripherie oder außerhalb des Kreises, dagegen nicht die Lage innerhalb. Soll dagegen von einem Punkte aus durch den Kreis eine Sekante so gezogen werden, daß das außerhalb des Kreises liegende Stück der in den Kreis fallenden Chorde gleich werde, so ist nur einer der drei Fälle möglich. Der gegebene Punkt nemlich muß außerhalb des gegebenen Kreises liegen, und darf weder innerhalb des Kreises noch auf der Peripherie gegeben sein. Die Determination also wird im ersten Falle aussprechen, der gegebene Pnnkt dürfe nicht innerhalb des Kreises liegen, im zweiten Falle, er müsse außerhalb desselben liegen.

Ein ähnliches Verhältniß findet in Beziehung auf Größe statt. Auch hier gibt es überhaupt drei Möglichkeiten. Die Linie a kann entweder gleich oder größer oder kleiner sein als b. Eine vierte Möglichkeit gibt es auch hier nicht. Von jenen dreien aber ist bei einer vorliegenden Aufgabe entweder nur eine ausgeschlossen und zwei können vorhanden sein, oder es ist nur eine möglich und zwei können nicht stattfinden. Wenn z. B. ein Dreieck aus drei gegebenen geraden Linien konstruirt werden soll, so muß jede einzelne kleiner sein als die Summe der beiden andern und darf weder gleich noch größer sein. Diese Summe ist also die Grenze für die größte Länge der einzelnen

Digitized by Google

Seite (das sogenannte Maximum), eine Grenze aber, die nicht wirklich erreicht werden darf. Soll dagegen durch einen gegebenen Punkt eine Sekante so gezogen werden, daß die in den Kreis fallende Chorde einer gegebenen geraden Linie gleich sei, so ist die Grenze für die größte Länge dieser Chorde (das Maximum) der Durchmesser, hier aber eine Grenze, die wirklich erreicht werden darf, so daß nur der Fall ausgeschlossen ist, wenn die gegebene Linie größer als der Durchmesser ist. Die Determination wird also aussprechen, die gegebene gerade Linie dürfe nicht größer sein als der Durchmesser. Liegt dagegen der gegebene Punkt innerhalb des Kreises, so gibt es nicht blos eine Determination für die größte Länge der gegebenen Linie, sondern auch für die kleinste (das sogenannte Minimum); die gegebene Linie nemlich darf nicht kleiner sein als diejenige Chorde, welche im gegebenen Punkte halbirt wird, wohl aber gleich oder größer, jedoch nicht größer als der Durchmesser. In Beziehung auf die Größe bestimmt also die Determination bald ein Maximum für eine gegebene Linie oder einen gegebenen Winkel, bald ein Minimum, bald aber auch beides.

Sprachlich bedient sie sich dabei verschiedener Ausdrucksformen. Sind unter den sowohl in Beziehung auf Lage als auch auf Größe möglichen drei Fällen zwei ausgeschlossen, so wird das Wörtchen muß gebraucht, z. B. a muß größer sein als b; ist dagegen nur eine ausgeschlossen, so erscheinen die Worte: darf nicht, z. B. a darf nicht kleiner sein als b. Denn im ersten Falle wäre es weitläufiger zu sagen: a darf nicht gleich oder kleiner sein als b, im zweiten: a muß gleich b oder größer als b sein.

Nicht selten wird schon in der Aufgabe selbst die Determination angedeutet, z. B. statt der Aufgabe: durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu beschreiben, liest man manchmal die Aufgabe: durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte einen Kreis zu beschreiben. Es ist dieß nicht zu empfehlen; denn entweder wird die in der Aufgabe enthaltene Beschränkung im Verlauf der Entwicklung gerechtfertigt, in diesem Falle aber erhält man dadurch doch nichts anderes, als die Determination, während dem Schüler eine Bestimmung in der

Digitized by Google

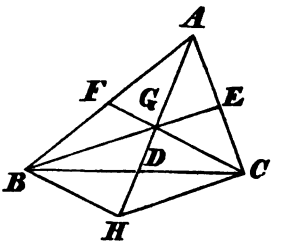
Aufgabe gegeben wird, deren Nothwendigkeit er noch nicht einzusehen vermag, ehe ihm die Gründe dafür angegeben sind. Oder aber man löst die gegebene Aufgabe mit der gegebenen Voraussetzung, ohne dieselbe als nothwendig zu begründen; in diesem Falle bleibt dem Schüler, wenn er nicht selbst im Stande ist, die Determination zu bilden, und wenn ihm nur gezeigt wird, wie er durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte einen Kreis beschreiben soll, immer noch die Frage übrig, wie er zu verfahren habe, um durch drei in gerader Linie liegende Punkte einen Kreis zu beschreiben, und er erwartet anderswoher die Lösung der letzteren Aufgabe. Man sieht daraus, daß solche in die Aufgabe aufgenommene Bedingungen im Allgemeinen nicht erkennen lassen, ob sie besondere Fälle oder ob sie eine wirkliche Determination enthalten.

Wenn allerdings in dem angegebenen Beispiele auch dem weniger geübten Schüler die Lösung der Frage nahe gelegt ist, warum der Beisatz gemacht sei, daß die drei gegebenen Punkte nicht in gerader Linie liegen dürfen, da in jeder Elementargeometrie der Satz sich findet, daß ein Kreis und eine gerade Linie nur zwei Punkte gemeinschaftlich haben können, so ist dieß doch bei vielen andern Aufgaben nicht der Fall, und es muß daher als Regel aufgestellt werden, daß die Fassung der Aufgabe stets eine allgemeine sein müsse, ohne daß die Determination schon in diese Fassung aufgenommen werden dürfe.

Diese Bemerkungen gelten natürlich ebenso für den Fall, daß die Determination sich nicht auf die Lage, sondern auf die Größe der gegebenen Stücke beziehe. Dabei muß aber noch eine besondere Bemerkung beigefügt werden. In sehr vielen Fällen geben allerdings entweder bekannte Lehrsätze, oder es gibt die Konstruktion und der mit ihr zusammenhängende Beweis die Mittel an die Hand, die Determination zu finden, d. h. anzugeben, wie groß oder wie klein eines oder mehrere der gegebenen Stücke sein dürfen, damit jene mit dieser sich in einer Figur vereinigen lassen; z. B. für die Aufgabe, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Grundlinie und ein Schenkel gegeben sind, ergibt sich aus dem Lehrsatze, daß in jedem Dreiecke je zwei Seiten zusammen größer sein müssen,

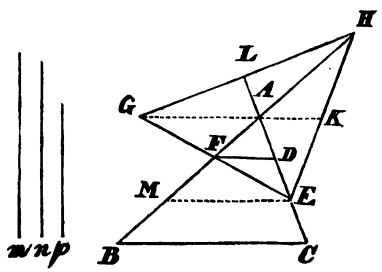
Digitized by Google

als die dritte, unmittelbar die Determination, daß der gegebene Schenkel größer sein müsse als die Hälfte der Grundlinie. Bei der Aufgabe ferner, ein Dreieck zu konstruiren, von welchem die drei von den Winkelspitzen nach den Halbirungspunkten der Gegenseiten gezogenen Transversalen (auch kürzer Mittel- oder Schwerpunktslinien genannt, letzteres wegen einer physikalischen Eigenschaft) gegeben sind, steht uns zwar kein Lehrsatz zu Gebote, aus welchen wir unmittelbar die Determination ableiten könnten; die Konstruktion jedoch wird uns leicht auf die Determination führen. Um diese Konstruktion zu finden, betrachten wir ein beliebiges Dreieck ABC näher, in welches wir die drei gegebenen Transversalen AD, BE, CF gezogen haben, von welchen die ebene Geometrie nachweist, daß sie sich sämmtlich in einem einzigen Punkte G so schneiden, daß AG = 2 GD oder $^2/_3$ AD, ebenso BG = $^2/_3$ BE, CG = $^2/_3$ CF ist; in △ BGC ist also BG, CG und GD gegeben, und die Konstruktion des Dreiecks ABC ist reduzirt auf die Konstruktion des Dreiecks BGC, von welchem zwei Seiten BG, CG und die nach dem Halbirungspunkte der dritten Seite von der Spitze des Gegenwinkels gezogene Transversale GD gegeben sind. Da in diesem Dreiecke BC in D halbirt ist, so erinnert uns die Form des Dreiecks wieder an ein Parallelogramm, in welchem beide Diagonalen gezogen sind; betrachten wir daher BC als die eine, und GD als die Hälfte der andern Diagonale, verlängern wir also GD über D hinaus so nach H, daß DH = GD wird, und ziehen BH und CH, so ist das Viereck BGCH ein Parallelogramm, da sich in ihm die Diagonalen BC, GH gegenseitig halbiren; in demselben aber ist gegeben BG, CG und GH = 2 GD; folglich sind in dem Dreiecke CGH drei Seiten gegeben, also das Dreieck konstruirbar. Es ergibt sich daraus folgende **Konstruktion**: m, n, p seien die gegebenen Transversalen; konstruire △ ABC so, daß AB = m, BC = n, AC = p wird, theile AC in D und E in drei gleiche Theile, und ziehe DF ‖ BC; ziehe EF und ver-



Digitized by Google

längere es nach G so, daß FG = EF wird; verlängere endlich FA so nach H, daß FH = AB = m wird, und ziehe EH, GH, so ist △ EGH das gesuchte. Der Beweis dafür ist folgender:

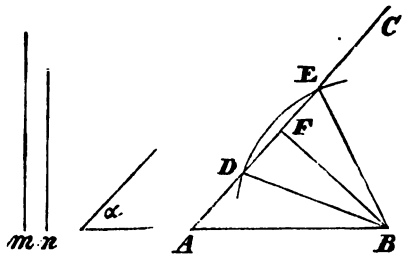


ziehe GA und verlängere es bis es EH in K trifft, ebenso verlängere EA, bis es GH in L trifft, und ziehe EM ∥ BC. Da EG in F halbirt, also HF Transversale von EG, und HF = m, und AF = ⅓ AB = ⅓ m, also AH = ⅔ m = 2 AF ist, so ist A der Durchschnittspunkt der drei Transversalen, oder EH wird durch GK in K, GH durch EL in L halbirt. Nun ist FH = m, EA = ⅔ AC = ⅔ p, also da AL = ½ EA = ⅓ p ist, EL = p; endlich ist △ AFG ≅ △ MFE, weil AF = FM, FG = FE und AFG = EFM ist, also ist GA = EM; folglich weil △ AEM ∽ △ ACB, also EM : BC = AE : AC, und daher auch EM = ⅔ BC = ⅔ n ist, so ist auch GA = ⅔ n, mithin GK = ⅔ n + ⅓ n = n. △ EGH hat daher die verlangten Transversalen. Aus dieser Konstruktion ergibt sich nun, weil dieselbe auf der Konstruktion von △ ABC aus den drei Seiten m, n, p beruht, die Determination, daß zur Möglichkeit der Ausführung immer die Summe von je zwei der gegebenen Transversalen größer sein muß als die dritte.

Es zeigt sich aber hier bald eine Grenze, über welche die ebene Geometrie nicht hinausschreiten kann. In allen Fällen nemlich, in welchen die Größe einer geraden Linie nicht blos von der Größe anderer Linien, sondern auch von der Größe von Winkeln abhängig ist, ist es der reinen ebenen Geometrie nicht möglich, unmittelbar aus den gegebenen Stücken die Abhängigkeit einer Größe von den übrigen zu bestimmen, da sie kein Verhältniß zwischen geraden Linien kennt, welches dem Verhältnisse zwischen Winkeln gleich wäre. Vielmehr war es gerade diese Beschränkung der ebenen Geometrie, durch welche die Mathematiker genöthigt wurden, eine weitere Wissenschaft zu

Digitized by Google

erfinden, die Trigonometrie. Determinationen also, welche in die erwähnte Kategorie fallen, können nur mit Hilfe der ebengenannten Wissenschaft aus den gegebenen Stücken unmittelbar abgeleitet worden. Ein Beispiel wird dieß deutlich machen. Nehmen wir die Aufgabe, ein Dreieck zu konstruiren, von welchem zwei Seiten, m, n, und der einer derselben n gegenüberliegende Winkel α gegeben sind, so ist bekanntlich die Konstruktion folgende: an AB = m lege in A einen Winkel BAC = α an, und beschreibe von B als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = n einen Kreisbogen, der AC in D oder E schneide; ziehe BD oder BE, so ist △ ABD oder ABE das gesuchte. Es ergibt sich aber aus der Konstruktion, daß die Auflösung nur dann möglich ist, wenn der vom Mittelpunkt B mit dem Halbmesser n beschriebene Kreis den Schenkel AC des Winkels α trifft. Letzteres wird aber nur dann geschehen, wenn n nicht kleiner ist als die kleinste gerade Linie, welche von B nach AC gezogen werden kann, d. h. nicht kleiner als der von B auf AC gefällte Perpendikel BF. BF selbst aber ist keine unmittelbar gegebene Größe, und wenn daher die Determination sagt, wenn man einen Schenkel des Winkels α = m mache, und von dem Endpunkte dieses Schenkels auf den andern einen Perpendikel fälle, so dürfe n nicht kleiner sein als dieser Perpendikel, damit die Ausführung der Konstruktion möglich werde, so muß diese Determination als eine mangelhafte betrachtet werden, weil sie nicht unmittelbar aus m und α die Abhängigkeit der Größe n abzuleiten vermag. Die Trigonometrie dagegen berechnet BF = AB sin BAF, und gibt daher die Determination: n darf nicht kleiner sein als m sin α.



Die angegebene Beschränkung der reinen Geometrie muß wohl beachtet werden, und findet beinahe überall da ihre Anwendung, wo unter den Bedingungen einer Aufgabe neben geraden Linien auch Winkel auftreten.

Digitized by Google

Zweites Buch.

Ueber die geometrische Analysis.

§. 1.

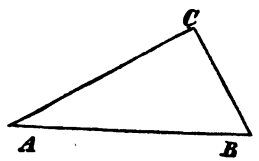
Wesen der geometrischen Analysis.

Es gibt viele Sammlungen von geometrischen Aufgaben nebst Auflösungen; wenn dieselben nur enthalten, was im ersten Buche als Theile einer Aufgabe angegeben wurde, nemlich Aufgabe, Konstruktion und Beweis, und, wo dieß nöthig und möglich ist, Determination, so können sie zwar in mehrfacher Hinsicht belehrend sein; aber die Wißbegierde sowohl als das wahre Bedürfniß des Schülers wird dadurch nicht befriedigt werden: die erstere nicht, weil dem Schüler immer noch die Frage unbeantwortet bleibt, wie etwa der Verfasser auf die gegebenen Auflösungen gekommen sein möge; eben so wenig aber auch das wahre Bedürfniß des Schülers, indem derselbe nur erfährt, wie jede einzelne Aufgabe, die gerade in der bestimmten Sammlung steht, gelöst werde, ohne daß er ein Mittel bekäme, sich bei solchen Aufgaben, welche in der Sammlung nicht stehen, selbst helfen zu können, außer insoferne jede Uebung überhaupt die Kraft stählt, also ihn auch wenigstens geistig mehr befähigt, selbstthätig bei seinen mathematischen Arbeiten zu Werke zu gehen.

Hier ist nun allerdings die reine Geometrie verschieden von der Algebra. Letztere gibt bestimmte Regeln über die

Digitized by Google

Auflösung ihrer Gleichungen, und wer einmal diese Regeln gelernt hat, weiß sich im Allgemeinen bei jeder vorkommenden Gleichung zu helfen; eine Schwierigkeit wird für ihn hie und da nur noch darin zu finden sein, aus einer gegebenen Aufgabe die Gleichung zu bilden, eine Operation, welche mehr philologischer als mathematischer Natur ist, da sie in ihren äußersten Beziehungen nichts anderes ist, als eine Uebersetzung aus der deutschen Sprache in die algebraische Zeichensprache. Die Koordinatenlehre in Verbindung mit der Trigonometrie gibt hier sehr umfassende Mittel an die Hand für die Lösung von geometrischen Aufgaben; aber selbst schon die gewöhnliche Algebra in Verbindung gebracht mit den elementaren Sätzen der ebenen Geometrie vermag hier Manches auf einfache Weise bei einiger Uebung des Schülers darzubieten. Ein Beispiel wird dieß nachweisen. Man habe die Aufgabe zu lösen: ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Hypotenuse und die Summe beider Katheten gegeben sind. Es sei gegeben $AB = a$, $AC + BC = b$; man setze $AC = x$, $BC = y$, so ist nach dem pythagorischen Lehrsatze



$$x^2 + y^2 = a^2.$$
$$x + y = b.$$

Um aus beiden Gleichungen x und y zu finden, erhebt man am bequemsten die zweite ins Quadrat, multiplizirt die erste mit 2, und zieht das gefundene Quadrat davon ab;

$$\begin{array}{r} x^2 + 2xy + y^2 = b^2. \\ 2x^2 \qquad\quad +2y^2 = 2a^2. \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 = 2a^2 - b^2. \end{array}$$

Zieht man nun aus der letztern Gleichung die Quadratwurzel aus, so erhält man

$$x - y = \pm \sqrt{2a^2 - b^2}.$$

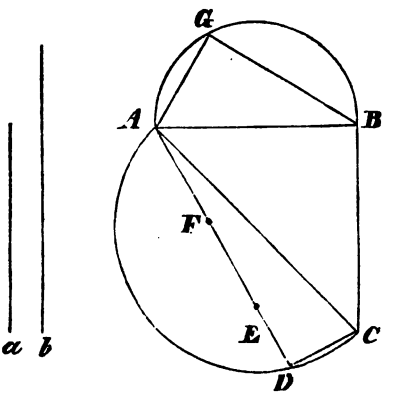
Da man nun die Summe und Differenz von x und y hat, so ist

$$x = \frac{b \pm \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}.$$

$$y = \frac{b \mp \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}.$$

Digitized by Google

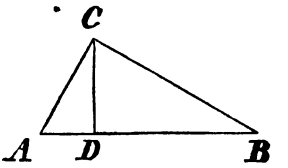
Diese Werthe nun müssen konstruirt werden. Dieß geschieht etwa auf folgende Weise: mache AB = a, lege unter einem rechten Winkel BC = a an und ziehe AC, so ist $AC^2 = 2\,AB^2 = 2a^2$; über AC beschreibe einen Halbkreis, lege in denselben AD = b, und ziehe CD, so ist $CD^2 = AC^2 - AD^2 = 2a^2 - b^2$, also $CD = \sqrt{2a^2 - b^2}$; von AD schneide DE = CD ab, so ist $AE = AD - DE = b - \sqrt{2a^2 - b^2}$; also wenn AE in F halbirt wird, $AF = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} = y$ oder $= x$, und daher $DF = b - AF = b - \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} = \frac{2b - b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} = x$ oder $= y$; folglich sind AF und DF beide Katheten. Beschreibt man daher über AB einen Halbkreis, legt in denselben AG = AF als Chorde und zieht BG, so ist ABG das verlangte Dreieck.



Auf ähnliche Art kann eine große Zahl anderer Aufgaben behandelt werden, und für manche Aufgabe wird der Schüler auf dem gezeigten Wege nach kurzer Uebung leicht eine Lösung finden, welche ihm ohne algebraische Behandlung Schwierigkeiten machen würde. Hieher gehört z. B. die Aufgabe, ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Summe beider Katheten und der von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel gegeben sind. Mancher, der in der Lösung geometrischer Aufgaben ziemlich geübt ist, wird vielleicht bei obiger Aufgabe mehrfache vergebliche Versuche machen, bis es ihm gelingt, ohne Anwendung der Algebra eine Lösung zu finden.

Digitized by Google

Es soll später eine reingeometrische Lösung dieser Aufgabe gegeben werden. Algebraisch ist sie nicht schwierig. Es sei $AC + BC = a$, $CD = b$, so ist, wenn $AC = x$, $BC = y$, $AB = z$ gesetzt wird,



$$x + y = a$$
$$xy = bz$$
$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2;$$

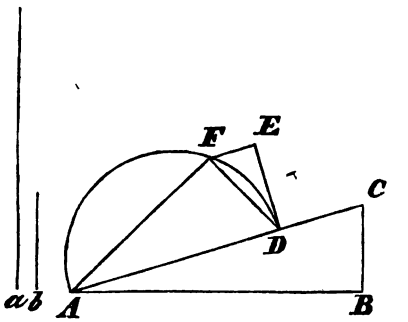
also wenn $x^2 + y^2 = z^2$ und $2xy = 2bz$ gesetzt wird,

$$z^2 + 2bz = a^2.$$
$$z^2 + 2bz + b^2 = a^2 + b^2.$$
$$z + b = \pm\sqrt{a^2 + b^2},$$

wobei wir hier nur das Zeichen + gelten lassen wollen, da für unsere Aufgabe $z + b$ einen positiven Werth hat, und die algebraische Untersuchung über die Bedeutung der Gleichung $z + b = -\sqrt{a^2 + b^2}$ uns von unserem Hauptzwecke abführen würde; also ist

$$z = -b + \sqrt{a^2 + b^2};$$

woraus sich folgende Konstruktion ergibt: Mache $AB = a$, errichte auf AB in B einen Perpendikel $BC = b$, und ziehe AC, so ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2$, also $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$; von AC schneide $CD = CB$ ab,



so ist $AD = AC - CB = -b + \sqrt{a^2 + b^2}$; also ist AD Hypotenuse des gesuchten Dreiecks. Beschreibt man über AD einen Halbkreis, errichtet $DE = DC$ in D senkrecht auf AD, zieht $EF \parallel AD$, bis es den Halbkreis in F trifft, und zieht endlich AF und DF, so ist $\triangle ADF$ das gesuchte.

Digitized by Google

Ganz anders ist das Verfahren vom Standpunkte der reinen Geometrie aus. Von allgemeinen Verfahrungsmethoden kann hier keine Rede sein, da die verschiedenen Konstruktionen bei der Vielseitigkeit der Aufgaben auf den verschiedensten Lehrsätzen beruhen, und es daher Sache einestheils genügender theoretischer Kenntnisse, anderntheils des Scharfsinns ist, daß bei jeder Aufgabe auch wirklich der passende Lehrsatz demjenigen einfalle, der sich mit der Lösung dieser Aufgabe beschäftigt. Es ergibt sich daraus, daß zunächst Jeder zur Lösung von Aufgaben um so geeigneter sein wird, je umfassender und gründlicher seine Kenntnisse in der Theorie der Geometrie sind, d. h. je mehr Lehrsätze er kennt, und je gründlicher er sie aufgefaßt hat. Diese Lehrsätze sind gleichsam die Instrumente oder Werkzeuge, deren er sich zur Verfertigung der ihm vorliegenden Arbeit bedienen muß, und wie ein technischer Arbeiter jede Arbeit um so leichter auszuführen im Stande sein wird, je vollständiger seine Werkstätte mit Werkzeugen ausgerüstet ist, so wird auch die Lösung von Aufgaben um so besser von Statten gehen, je umfassender hier die geistige Werkstätte, in welcher das gegebene Material verarbeitet werden soll, mit den Werkzeugen der Lehrsätze versehen ist; ja manche Aufgaben werden ohne vorangegangene Kenntniß bestimmter Lehrsätze gar nicht lösbar sein. Gründliches und umfassendes Studium der Theorie ist also das erste Erforderniß, um sich zu größerer Gewandheit in der Lösung von Aufgaben heranzubilden.

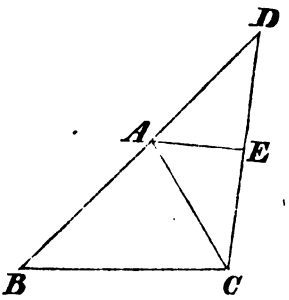
Dabei thuns natürlich wie bei den technischen Arbeiten, so auch hier die Werkzeuge nicht allein. Wer das beste Werkzeug ungeschickt in die Hand nimmt, wird nichts damit leisten. Es bedarf somit, wie überall, auch bei der Lösung von Aufgaben neben natürlichem Verstande und Scharfsinn einer gehörigen Uebung in der Lösung von Aufgaben, wenn man schnell zum Ziele kommen will. Mit der Anzahl der gelösten Aufgaben wächst unter sonst gleichen Umständen die Kraft und die Gewandheit.

Dabei ist es aber nicht gleichgültig, wie diese Lösung geübt worden ist; eine einzige von dem Schüler selbst gelöste Aufgabe stärkt seine Kraft mehr als ein Dutzend Aufgaben, deren Lösung

Digitized by Google

ihm der Lehrer gezeigt hat. Und dieses Selbstauffinden von Lösungen ist nicht etwa dem bloßen Zufall oder einem augenblicklichen glücklichen Einfalle anheimgegeben, wenn gleich nach der obigen Behauptung von allgemeinen Regeln über die Lösung von Aufgaben vom geometrischen Standpunkte aus nicht die Rede sein kann. Es steht vielmehr dem Mathematiker ein Weg zu Gebot, der ihn, wenn er auf ihm fest und sicher fortschreitet, nach gehöriger Uebung selten irre führen wird. Und dieser Weg ist die geometrische Analysis.

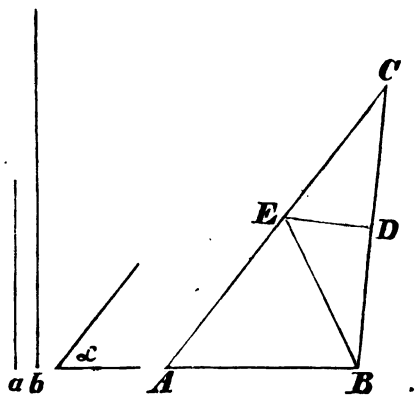
Um das Wesen derselben kennen zu lernen, gehen wir am besten von einem Beispiele aus. Es sei dem Schüler die Aufgabe gegeben, ein Dreieck zu konstruiren, von welchem eine Seite, ein anliegender Winkel und die Summe beider andern Seiten gegeben sind. Um die Lösung dieser Aufgabe selbst auffinden zu können, wird sich der Schüler ein beliebiges Dreieck ABC zeichnen und zwar ohne alle Rücksicht darauf, ob dieses Dreieck gerade die gegebenen Stücke enthalte oder nicht; denn seine Lösung soll ja eine allgemeine, auch für Stücke von anderer Größe, als wie sie sich gerade zufällig bei den gegebenen findet, gültige sein. An dem vorliegenden Dreiecke ABC nun untersucht er, in welchem Verhältnisse die gegebenen Stücke und die gesuchten zu einander stehen. Zu diesem Behufe hat er natürlich zunächst die gegebenen Stücke wirklich darzustellen. Es ist einerlei, welche Seite und welchen der beiden ihr anliegenden Winkel er als gegeben betrachtet. Es sei dieß BC und der Winkel ABC, so sind ihm dadurch die Punkte B und C als Winkelspitzen des Dreiecks gegeben, ebenso ist ihm die Richtung von BA, also eine gerade Linie gegeben, auf welcher die dritte Winkelspitze A liegen muß. Es ist nun nothwendig, daß er das dritte gegebene Stück, nemlich die Summe von BA und AC, wirklich darstelle. Es kann dieß auf zweierlei Art geschehen, entweder indem er BA um AC, oder indem er AC um BA verlängert.



Digitized by Google

Daß beides an dem Punkte A geschehen müsse, versteht sich von selbst, da dort beide Seiten an einander stoßen, und er also eine von beiden (ähnlich dem Halbmesser des Kreises) nur um einen ihrer Endpunkte zu drehen hat, während er bei der Verlängerung über B oder C hinaus eine Seite in eine ganz andere, mit ihrer gegenwärtigen in gar keiner Beziehung mehr stehende Lage zu bringen hätte. Von den beiden bezeichneten Fällen wird aber der Schüler bei einigem Nachdenken den erstern wählen, und BA nach D verlängern, da ihm die Lage von BA gegen BC durch den Winkel ABC bekannt ist, während er über die Lage von AC gegen BC nichts weiß. Da ihm nun auch die Größe von BD bekannt ist, so kann er auch den Punkt D als gegeben betrachten, und er weiß zugleich, daß die Winkelspitze A des Dreiecks auf BD liegen muß. Da nun AD = AC sein muß, damit die Summe der beiden Seiten BA + AC gleich der gegebenen Summe BD wird, so folgt daraus, daß A von den beiden Punkten C und D gleichweit entfernt ist; also liegt A auf dem im Halbirungspunkte E der Verbindungslinie CD errichteten Perpendikel; mithin ist A der Durchschnitt dieses Perpendikels mit BD, folglich ist auch die dritte Winkelspitze des Dreiecks und somit das Dreieck selbst gegeben.

Durch den hier entwickelten Gang der Betrachtung wird der Schüler von selbst für die Aufgabe, ein Dreieck zu konstruiren, von welchem eine Seite = a, ein anliegender Winkel = α und die Summe beider andern Seiten = b gegeben sind, auf folgende bekannte und gewöhnliche Konstruktion geführt:



Mache AB = a, lege an AB in A eine Linie AC = b unter dem Winkel BAC = α an, und ziehe BC; halbire BC in D und errichte auf BC in D

Digitized by Google

einen Perpendikel, welcher AC in E treffe; ziehe endlich BE, so ist △ ABE das verlangte, wie sich leicht beweisen läßt.

Wie sich nun aus dem angeführten Beispiele ergibt, ist die Analysis eine Methode der Behandlung von Aufgaben, deren wesentlicher Gang folgender ist: Man konstruirt sich eine fertige Figur, welche von der nemlichen Gattung ist, wie die gesuchte, also z. B. wenn ein Dreieck überhaupt oder ein gleichseitiges Dreieck, ein Viereck, ein Trapez, ein Parallelogramm mit bestimmten Eigenschaften verlangt wird, konstruirt man ein beliebiges Dreieck, oder gleichseitiges Dreieck, oder ein Viereck überhaupt, oder ein Trapez, oder endlich ein Parallelogramm. Man denkt sich hierauf diese Figur als entstanden aus den gegebenen Stücken, welche in ihr enthalten sein werden, nur von anderer Größe als in der Aufgabe. Man unterscheidet daher genau an der gezeichneten Figur zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken, und wo die gegebenen Stücke nicht unmittelbare Theile der Figur sind (wie dieß z. B. immer der Fall ist, wenn nicht Seiten oder Winkel, sondern Summen oder Differenzen derselben, Höhenperpendikel, Mittellinien und Aehnliches gegeben sind), werden diese gegebenen Stücke in der Figur wirklich dargestellt, und zwar (wie das gegebene Beispiel zeigt) so, daß dieselben möglichst in Verbindung mit einander bleiben. Da nun die gesuchte Figur, wenn sie eine geradlinige ist, dadurch bestimmt wird, daß ihre sämmtlichen Winkelspitzen festgestellt werden, ist sie aber ein Kreis, dadurch, daß Mittelpunkt und Halbmesser, oder, was einerlei ist, außer dem Mittelpunkte noch ein Punkt der Peripherie bestimmt wird, und da überhaupt auch in andern Fällen die Konstruktion beinahe durchweg auf die Bestimmung von Punkten zurückkommt, so untersucht man zuerst, welche von den Punkten, durch deren Bestimmung die Figur selbst bestimmt ist, durch die gegebenen Stücke unmittelbar als gegeben betrachtet, also vermittelst der gegebenen Stücke unmittelbar konstruirt werden können, welche Punkte aber als gesucht betrachtet werden müssen. Ist man nun so weit gekommen, so ist die Lage der zu suchenden Punkte mit der Lage der gegebenen in die verschiedenen möglichen Beziehungen zu setzen, um daraus vermittelst irgend eines geometrischen Lehrsatzes zu

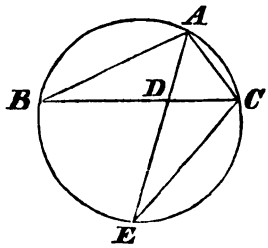
Digitized by Google

erkennen, wie die gesuchten Punkte aus den gegebenen gefunden werden können. Dieß ist nun derjenige Theil der Analysis, für welchen keine bestimmte Regel mehr gegeben werden kann, von welchem vielmehr oben gezeigt wurde, daß der Geübtere, von Natur Scharfsinnigere, und mit den geometrischen Lehrsätzen gründlicher und umfassender Vertraute den Vortheil vor dem voraus haben wird, welcher in den erwähnten Beziehungen auf einer niederern Stufe steht. Natürlich sind nicht alle Lehrsätze für die Lösung von Aufgaben gleich wichtig; es sind insbesondere die Sätze über die geometrischen Oerter aus später zu entwickelnden Gründen als die bei Weitem wichtigsten zu betrachten. Sie sind es folglich vor Allen, die sich der Lösende stets zu vergegenwärtigen hat; daher auch das letzte Buch eine Zusammenstellung solcher Sätze geben soll. Immer aber ist ein durch die Analysis erreichter Hauptvortheil der, daß in einer Figur unmittelbar das Gegebene und Gesuchte neben einander vor Augen liegen, und dadurch die Anschauung dem Aufsuchen der Beziehungen zwischen beiden eine wesentliche Erleichterung gewährt.

Dabei ist zugleich auf einen wichtigen Punkt für die Analysis noch besonders aufmerksam zu machen. Nicht immer sind die gesuchten Punkte von den gegebenen unmittelbar so abhängig, daß die Figur selbst bei möglichst umfassender Kenntniß der Theorie der Geometrie sogleich an einen Lehrsatz erinnerte, durch welchen die gesuchten Punkte vermittelst der gegebenen gefunden werden könnten. Oft kann diese Abhängigkeit nur mittelbar erkannt werden, indem man Hilfslinien benützt, die von den gegebenen Stücken abhängig sind, und aus denen wieder die gesuchten Stücke abgeleitet werden können.

Es sei z. B. die Aufgabe gegeben, ein Dreieck zu konstruiren, von welchem eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Halbirungslinie des letzteren, d. h. dasjenige Stück dieser Halbirungslinie, welches zwischen der Winkelspitze und der gegenüberliegenden Seite liegt, gegeben sind. Man nehme ein beliebiges Dreieck ABC und halbire in demselben den Winkel BAC durch AD, welches die Seite BC in D treffe, so können BC, BAC und AD als gegeben betrachtet werden.

Digitized by Google

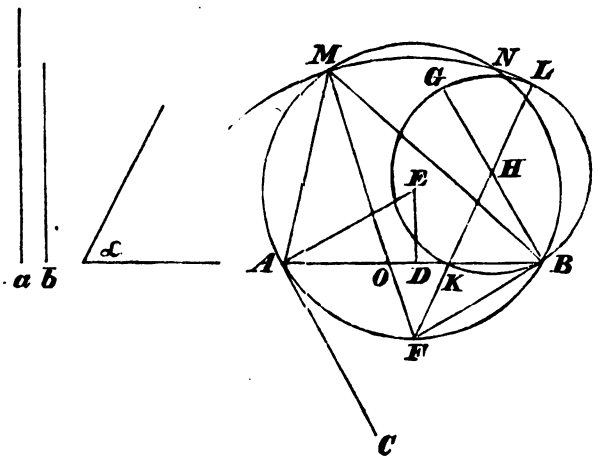


Durch BC sind die Punkte B und C gegeben, und es handelt sich also noch um die Bestimmung des Punktes A, um das gesuchte Dreieck als bestimmt betrachten zu können. Da BAC gegeben ist, so liegt A nach bekannten geometrischen Lehrsätzen auf dem Bogen eines Kreises, der über BC als Chorde so beschrieben worden ist, daß er einen Winkel gleich dem gegebenen Winkel faßt; beschreibe man daher um △ ABC einen Kreis, so kann dieser durch BC und den Winkel BAC als gegeben betrachtet werden, und A muß irgendwo auf dem BAC liegen; es ist einleuchtend, daß nicht jeder Punkt auf diesem Bogen die Eigenschaft hat, daß die Halbirungslinie des Winkels dieselbe Größe wie AD hat, und es muß nun, da beide andern Bedingungen schon für die Feststellung der Punkte B und C so wie für die Konstruktion des Kreises verwendet sind, die Größe von AD so wie die Bedingung, daß AD den Winkel BAC halbiren müsse, zu Hilfe genommen werden, um dadurch den Punkt A auf dem Bogen BAC zu bestimmen. Letztere Bedingung führt nun zunächst darauf, AD bis zum entgegengesetzten Punkte der Peripherie nach E zu verlängern, wodurch sich ergibt, daß, weil BAE = CAE, also auch der Bogen BE gleich dem Bogen CE sein muß, E als Halbirungspunkt des Bogens BEC ebenfalls als gegeben betrachtet werden darf. Unsere Aufgabe ist dadurch auf die andere Aufgabe reduzirt: wenn ein gegebener Kreis durch eine Chorde BC in zwei Bögen getheilt ist, von dem Halbirungspunkte E des einen Bogens aus eine Chorde EA so zu ziehen, daß das in den zum andern Bogen gehörigen Kreisabschnitt fallende Stück derselben eine gegebene Größe = AD habe. Bringen wir nun den gegebenen Punkt E noch in Verbindung mit einem der beiden andern gegebenen Punkte, z. B. mit C, indem wir EC ziehen, welches ebenfalls als gegeben betrachtet werden kann, so zeigt sich bei näherer Betrachtung, daß △ CED ∽ △ AEC ist, weil CED = CEA, ECD = ECB = EAB (als Peripheriewinkel auf gleichen Bögen) = CAE, also auch

Digitized by Google

EDC = ACE ist; daher ist ED : EC = EC : EA, oder die drei Linien, CD, EC, EA sind stetig proportionirt. Von denselben aber ist die mittlere EC, so wie die Differenz der beiden äußern ED und EA gegeben, weil EA — ED = AD gegeben ist; die Aufgabe ist also weiter noch auf die einfachere Aufgabe reduzirt, zu einer gegebenen geraden Linie als mittlerer Proportionallinie die beiden äußern Glieder zu finden, wenn deren Differenz gegeben ist; letztere Aufgabe aber ist bekanntlich leicht zu lösen mit Hilfe des Satzes, daß, wenn von einem Punkte außerhalb eines Kreises an denselben eine Tangente und eine Sekante gezogen werden, die Tangente die mittlere Proportionale sei zwischen der ganzen Sekante und dem außerhalb des Kreises liegenden Stücke.

Vermittelst der gewählten Hilfslinien werden wir also zu folgender Konstruktion der gegebenen Aufgabe geleitet: es sei a



die gegebene Seite, b die gegebene Halbirungslinie und α der gegebene Winkel; an AB = a lege in A einen Winkel BAC = α; auf AC errichte in A und auf AB im Halbirungspunkte D Perpendikel, welche sich in E schneiden; von E als Mittelpunkt beschreibe mit EA als Halbmesser einen Kreis, der durch B gehen wird, weil E von A und B gleichweit entfernt ist; halbire den auf der Seite des Winkels BAC liegenden Bogen des Kreises in F, und ziehe FB; auf FB errichte in B einen

Digitized by Google

Perpendikel BG = b, halbire BG in H, und beschreibe von H als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser HB; von F ziehe durch H eine Sekante, welche den letztern Kreis in K und L schneide, und beschreibe hierauf von F als Mittelpunkt mit FL als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher den erstern Kreis in M oder N schneide, so ist M oder N die Spitze, und AB die Grundlinie des gesuchten Dreiecks. Denn zieht man MA, MB und MF, welches AB in O schneide, so ist AB = a; ferner da AB Chorde und AC Tangente des Kreises AMBF ist, so ist AMB = BAC = α; da ferner AB in F halbirt, also Bogen AF = Bogen BF ist, so ist AMF = BMF, oder AMB durch MO halbirt; endlich ist OFB = MFB, OBF = AMF (da Bogen AF gleich Bogen BF ist) = BMF, also auch FOB = FBM; mithin ist $\triangle$ OFB $\sim$ $\triangle$ BFM, und daher FO : FB = FB : FM, also FB^2 = FO . FM; nun ist aber auch FB^2 = FK . FL, weil BG Durchmesser und FBG = 90°, also FB Tangente des Kreises GLBK ist; also ist FO . FM = FK . FL; aber FM = FL (als Halbmesser des nemlichen Kreises); mithin ist auch FO = FK, und daher FM — FO = FL — FK, d. h. MO = KL = BG = b. Derselbe Beweis gilt, wenn AN und BN gezogen werden, für das Dreieck ABN.

Das richtige und zweckmäßige Ziehen von Hilfslinien bei der geometrischen Analysis ist die Hauptkunst des Analytikers, und neben natürlichem Scharfsinn ist hiezu vorzüglich Uebung sowie das Studium der in den besseren mathematischen Schriften gegebenen Muster nothwendig. Gerade eine zweckmäßige Wahl der Hilfslinien ist es vor Allem, welche auf einfache und elegante Auflösungen führt, während oft eine falsche Wahl derselben entweder ganz von der Auflösung abführt, oder wenigstens solche Auflösungen gibt, welche wegen Mangels an Einfachheit und Eleganz als mißlungen zu verwerfen sind. Führt daher irgend eine gewählte Hilfslinie gar nicht oder nur schwierig zum Ziele, so versuche man es mit einer andern. Um Hilfslinien zu erhalten, schlägt man übrigens am häufigsten folgende Wege ein: man verbindet Punkte in der Figur, welche noch nicht verbunden sind, durch gerade Linien; man verlängert gerade Linien in der Figur, wenn solche nicht parallel sind, bis

Digitized by Google

sie sich schneiden; man zieht durch gegebene Punkte der Figur Parallelen mit Linien in derselben; man fällt von gegebenen Punkten auf Linien Perpendikel, oder errichtet auf gegebenen Linien in gegebenen auf ihnen liegenden Punkten Perpendikel, und verlängert dieselben bis zum Durchschnitte mit andern Linien der Figur; man legt an Punkte Winkel, welche gegebenen Winkeln gleich sind; man halbirt Winkel; man verdoppelt Dreiecke so, daß Parallelogramme entstehen; man beschreibt aus gegebenen Punkten mit gegebenen Linien als Halbmessern Kreise; man beschreibt Kreise in oder um Dreiecke; ebenso beschreibt man konzentrische oder berührende Kreise u. dgl.

Es wird, ehe wir den Zusammenhang der Analysis mit der Konstruktion und dem Beweise näher betrachten, zweckmäßig sein, in dem nächsten Paragraphen einige Aufgaben durch geometrische Analysis zu behandeln, besonders in der Richtung, daß dadurch nachgewiesen wird, wie das Ziehen verschiedener Hilfslinien häufig zu verschiedenen Konstruktionen führe. Diese Aufgaben können uns dann zugleich für den folgenden Paragraphen theilweise als Muster dienen, um unsere weitern Betrachtungen daran zu knüpfen. Wir behandeln dabei die Analysis kürzer, als in den zwei obigen Beispielen, indem es dem Schüler überlassen bleibt, sich die Frage zu beantworten, wie man auf die in jedem einzelnen Falle gezogenen Hilfslinien gekommen sei, und fügen nur da, wo wir auf Besonderes den Schüler aufmerksam machen wollen, einige ausführlichere Bemerkungen bei. Eine gute Uebung für die Selbstthätigkeit der Schüler möchte dabei die Behandlung der beiden Aufgaben, einen gegebenen Winkel zu halbiren, und durch einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen geraden Linie eine Parallele zu ziehen, dadurch werden, daß der Schüler sich bemüht, möglichst viele Lösungen zu finden, was ihm mit Beiziehung aller ihm zu Gebote stehenden Lehrsätze nicht besonders schwierig erscheinen wird.

Digitized by Google

§. 2.

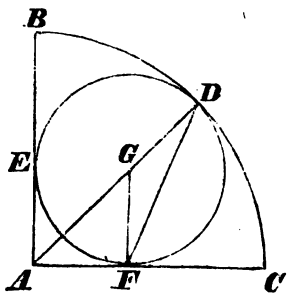
Auflösung einiger geometrischen Aufgaben durch Anwendung der geometrischen Analysis.

I. Aufgabe.

In einen gegebenen Quadranten einen Kreis zu beschreiben.

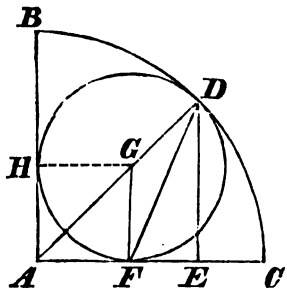
1. Auflösung.

Analysis. Es sei BAC der gegebene Quadrant, DEF der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkte G, und D, E, F die Berührungspunkte desselben mit dem Bogen BC und den Halbmessern BA und CA. Da A Mittelpunkt des Quadranten, G Mittelpunkt des gesuchten Kreises und D Berührungspunkt beider Kreise ist, so liegen A, G, D in gerader Linie; ferner ist durch AGD der Winkel BAC halbirt, weil AE und AF Tangenten des gesuchten Kreises sind; also ist AD der Lage nach, folglich der Punkt D gegeben; zieht man ferner GF und DF, so ist GF = GD, also GFD = GDF; aber da GAF = $\frac{1}{2}$R, und AFG = R, also AGF = $\frac{1}{2}$R und AGF = GFD + GDF ist, so ist GDF = $\frac{1}{4}$R; also ist GDF, folglich der Punkt F gegeben; folglich ist, da FG auf AC senkrecht steht, der Mittelpunkt G und daher auch der Halbmesser GD, also der gesuchte Kreis gegeben.



Konstruktion. Halbire BAC durch AD, welches den Bogen des gegebenen Quadranten in D treffe, von D fälle auf AC den Perpendikel DE und halbire den Winkel ADE durch DF, welches AC in F treffe; auf AC errichte in F einen Perpendikel, welcher AD in G treffe, und beschreibe von G als Mittelpunkt mit GD als Halbmesser einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

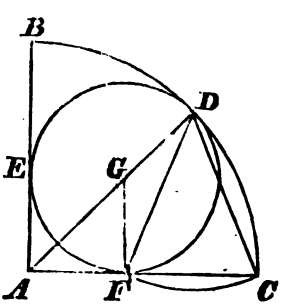
Digitized by Google



Beweis. Da GD Halbmesser des gefundenen Kreises und AD Halbmesser des gegebenen Kreisbogens, also die Entfernung beider Mittelpunkte gleich der Differenz der Halbmesser ist, so berühren sich beide Kreise von Innen; ferner ist GF ‖ DE, weil beide senkrecht auf AC stehen, also GFD = FDE; aber auch GDF = FDE, also ist GFD = GDF und daher GF = GD. Der gefundene Kreis geht also durch F; und da AFG = R ist, so ist AC Tangente des Kreises; da endlich BAC durch AG halbirt ist, so ist der von G auf AB gefällte Perpendikel GH = GF; also geht der gefundene Kreis auch durch H, und AB ist ebenfalls Tangente an denselben.

Zusatz. Faßt man die gegebene Aufgabe allgemeiner so, daß sie lautet: einen Kreis zu beschreiben, der die beiden Halbmesser und den Bogen eines Quadranten berühre, so gibt es noch einen zweiten Kreis, der die verlangten Eigenschaften hat, nemlich denjenigen Kreis, welcher den Bogen von Außen und daher die Halbmesser AB und AC in der Verlängerung berührt. Eine ähnliche Analysis wie die obige würde zeigen, daß der zweite Kreis durch eine analoge Konstruktion wie oben gefunden werden kann, nur daß statt des Winkels ADE dessen Nebenwinkel halbirt und die Halbirungslinie verlängert werden muß, bis sie die Verlängerung von AC trifft.

2. Auflösung.



Analysis. Es sei wieder BAC der Quadrant, und DEF der gesuchte Kreis mit dem Mittelpunkte G, so ist wie in der ersten Auflösung AD Halbirungslinie des Winkels BAC, also der Berührungspunkt D gegeben; ziehe ferner DF, GF und DC, so ist wie in der ersten Analysis GDF

Digitized by Google

$= GFD = {}^1/_4R$; also $AFD = {}^5/_4R$, und daher $DFC = {}^3/_4R$; aber da $DAC = {}^1/_2R$ und $ADC = ACD$ ist, so ist auch $ACD = {}^3/_4R$; folglich ist $DFC = DCF$, also $DF = DC$; also liegt F auf dem mit DC als Halbmesser beschriebenen Kreise, und ist daher gegeben; worauf G wie oben gegeben ist.

Konstruktion. (s. die vorige Figur.)*) Halbire BAC durch AD, welches den gegebenen Quadranten in D treffe, ziehe DC, und beschreibe von D als Mittelpunkt mit DC als Halbmesser einen Kreisbogen, der AC in F schneide; auf AC errichte endlich in F einen Perpendikel, der AD in G schneide, so ist wieder G Mittelpunkt und GD Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis. Daß dieser Kreis BC in D berühre, wird wie in Auflösung 1 bewiesen; ferner da $DC = DF$ ist, so ist $DCF = DFC$; aber $DCF = {}^3/_4R$, weil $DAC = {}^1/_2R$ und $AD = AC$ ist; daher ist auch $DFC = {}^3/_4R$; folglich ist $AFD = {}^5/_4R$, und daher, weil $DAF = {}^1/_2R$ und $AFG = R$ ist, $GDF = {}^1/_4R$, und $GFD = {}^1/_4R$, also $GDF = GFD$, und daher $GF = GD$, woraus wie in Auflösung 1 weiter folgt, daß der gefundene Kreis AC und AB berührt.

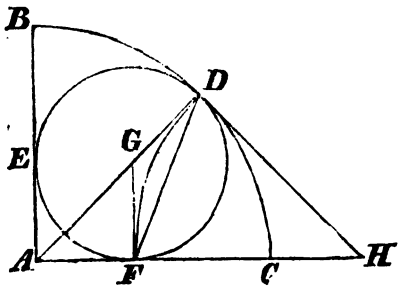
Zusatz. Eine analoge Analysis gibt für die im Zusatze zur ersten Auflösung erwähnte Aufgabe eine ähnliche Konstruktion, nur daß CB über B hinaus zum Halbkreise ergänzt, und hierauf von D nicht an den Endpunkt C dieses Halbkreises, sondern an den andern Endpunkt eine gerade Linie gezogen wird.

3. Auflösung.

Analysis. Der Punkt D ist wie oben gegeben; ziehe an die beiden Kreise in D die gemeinschaftliche Tangente DH,

*) Früheren Bemerkungen entsprechend sollten in der Konstruktion die Punkte, wie sie nach und nach entstehen, mit den Buchstaben nach der Ordnung des Alphabets bezeichnet werden; als Muster für das Folgende ist dieß bei der ersten Auflösung geschehen; bei dieser und den folgenden Auflösungen aber findet, um die Wiederholung der Figur zu vermeiden, der Kürze wegen eine Berufung auf die in der Analysis gebrauchte Figur statt.

Digitized by Google



welche die Verlängerung von AC in H treffe, so ist H gegeben; nun ist DAH = $^1/_2$R, ADH = R, also auch DHA = $^1/_2$R; aber wie oben AFD = $^5/_4$R, also DFH = $^3/_4$R; folglich in △ DFH auch FDH = $^3/_4$R und daher DFH = FDH, also auch DH = FH; folglich ist der Punkt F gegeben, woraus sich der Punkt G wie oben bestimmt.

Konstruktion. Halbire BAC durch AD, welches den Bogen BC in D treffe; auf AD errichte in D den Perpendikel DH, welcher die Verlängerung von AC in H treffe; von H als Mittelpunkt beschreibe mit HD als Halbmesser einen Kreisbogen, der AC in F treffe; auf AC endlich errichte in F einen Perpendikel FG, der AD in G treffe, so ist G Mittelpunkt und GD Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis. Da HD = HF ist, so ist HDF = HFD; aber GDH = GFH = 90°, also ist auch GDH − HDF = GFH − HFD, d. h. GDF = GFD; folglich ist GD = GF, woraus das Uebrige wie oben folgt.

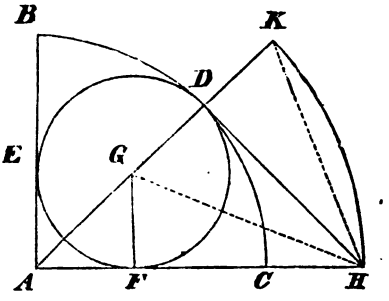
Zusatz. Durch eine ähnliche Analysis ergibt sich, daß man den zweiten, den Bogen von Außen berührenden Kreis dadurch erhält, daß man den zweiten Durchschnitt des von H als Mittelpunkt mit HD als Halbmesser beschriebenen Kreises mit AC auf der Verlängerung von AH über H hinaus benützt.

4. Auflösung.

Analysis. Nachdem D wie früher bestimmt worden, ziehe an D die gemeinschaftliche Tangente und verlängere sie, bis sie die Verlängerung von AC in H trifft; ziehe hierauf GH und GF, so ist DG = FG, GDH = GFH = 90°, und

Digitized by Google

GH gemeinschaftlich, und daher $\triangle$ DGH $\cong$ $\triangle$FGH, also FGH = DGH; aber AGF = $^1/_2$R, weil GAF = $^1/_2$R und AFG = R ist; also ist DGH = $^3/_4$R, und GHD = $^1/_4$R; macht man daher DK = DG und zieht KH, wodurch $\triangle$ KDH $\cong$ $\triangle$ GDH wird, so ist auch DKH = $^3/_4$R; aber KAH = $^1/_2$R, also AHK = $^3/_4$R und daher AK = AH; nun ist H, also auch K, also auch G gegeben.



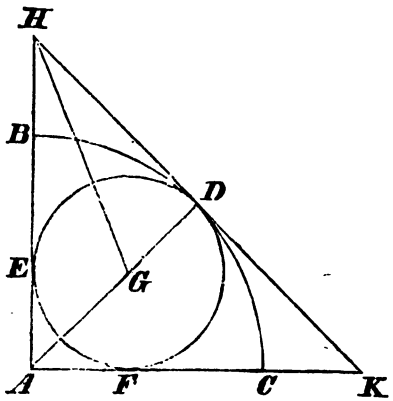
Konstruktion. Halbire BAC durch AD, welches den Bogen BC in D treffe; auf AD errichte in D den Perpendikel DH, welcher die Verlängerung von AC in H treffe; von A als Mittelpunkt beschreibe mit AH als Halbmesser einen Kreisbogen, der die Verlängerung von AD in K treffe, und schneide von DA ein Stück DG = DK ab, so ist G Mittelpunkt und DG Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis. Ziehe KH und GH, und fälle von G auf AC den Perpendikel GF. Da AK = AH ist, so ist AKH = AHK; aber HAK = $^1/_2$R, also AKH = $^3/_4$R. Da ferner DG = DK, DH = DH und GDH = KDH = R ist, so ist auch $\triangle$ GDH $\cong$ $\triangle$ KDH, und daher DGH auch = $^3/_4$R; nun ist GAF = $^1/_2$R, AFG = R, also AGF = $^1/_2$R; folglich ist auch FGH = $^3/_4$R; da nun GFH = GDH = R, und GH = GH ist, so ist $\triangle$ FGH $\cong$ $\triangle$ DGH, also GF = GD, woraus das Uebrige wie oben folgt.

Zusatz. Auch hier findet man durch eine analoge Analysis, daß man den äußern Berührungskreis erhält, wenn man den von A als Mittelpunkt mit AH als Halbmesser beschriebenen Bogen bis zum zweiten Durchschnitt mit AD auf der Verlängerung über A hinaus verlängert, und sonst wie oben verfährt.

Digitized by Google

5. Auflösung.



Analysis. Nachdem D wie früher bestimmt worden, ziehe wieder an den Punkt D die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise, und verlängere sie, bis sie die Verlängerungen von AB und AC in H und K trifft, so sind die Punkte H und K, also △ HAK gegeben; da nun der gesuchte Kreis AH, AK, HK berührt, so ist die gegebene Aufgabe auf die bekannte Aufgabe reduzirt: in ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Konstruktion. Halbire BAC durch AD, welches den Bogen BC in D treffe; auf AD errichte in D einen Perpendikel, welcher die Verlängerungen von AB und AC in H und K treffe; halbire endlich AHK durch HG, welches AD in G treffe, so ist G Mittelpunkt und GD Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis. Da G der Durchschnitt der Halbirungslinien zweier Winkel HAK und AHK ist, so ist G von allen Seiten des Dreiecks AHK gleichweit entfernt, und ein von G als Mittelpunkt mit GD als Halbmesser beschriebener Kreis berührt also nicht blos HK, welches auf GD senkrecht steht, sondern auch AH und AK; endlich ist AD Halbmesser des Bogens BC, und GD Halbmesser des Kreises DEF; also ist die Entfernung AG beider Mittelpunkte gleich der Differenz beider Halbmesser; folglich berühren sich auch beide Kreise.

Zusatz 1. Auch hier ergibt sich durch eine analoge Analysis, daß man den äußern Berührungskreis durch die nemliche Konstruktion erhält, nur mit dem Unterschiede, daß statt des Winkels AHK der Nebenwinkel desselben halbirt und

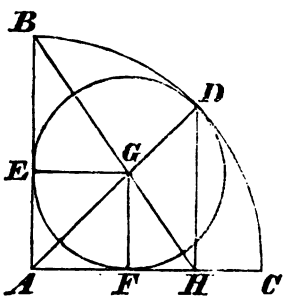
Digitized by Google

die Halbirungslinie bis zum Durchschnitte mit der Verlängerung von AD verlängert werden muß.

Zusatz 2. Obige Konstruktion hätte sich auch durch eine andere Analysis aus der Figur zur 4. Auflösung ergeben, da dort $\triangle$ GDH $\cong$ $\triangle$ GFH, also AHD durch HG halbirt wird.

6. Auflösung.

Analysis. Nachdem D wieder wie bisher bestimmt ist, fälle von D und G auf AC die Perpendikel DH und FG und ziehe BH. Da GF = GD ist, so ist GF : FH = GD : FH = AD : AH (weil G auf AD liegt und GF $\parallel$ DH ist) = AB : AH (weil AD = AB ist). Da nun zugleich BAH = GFH = 90° ist, so ist $\triangle$ GFH $\sim$ $\triangle$ BAH, also GHF = BHA. Folglich fällt HG auf HB und die Punkte B, G, H liegen daher in gerader Linie.



Konstruktion. Halbire BAC durch AD, welches den Bogen BC in D treffe; von D fälle auf AC den Perpendikel DH und ziehe BH, welches AD in G schneide, so ist G Mittelpunkt und GD Halbmesser des gesuchten Kreises.

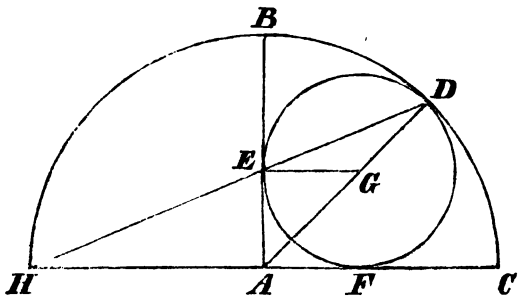
Beweis. Von G fälle auf AC den Perpendikel GF, so ist GF $\parallel$ DH $\parallel$ BA, also ist HF : HA = DG : DA = GF : BA; aber DA = BA, also auch DG = GF, woraus sich das Uebrige wie früher ergibt.

Zusatz. Den äußern Berührungskreis erhält man durch eine analoge Analysis und Konstruktion, wenn man BC über C hinaus zum Halbkreise ergänzt, und statt von B aus von dem entgegengesetzten Endpunkte des Halbkreises nach H eine gerade Linie zieht, welche verlängert bis zum Durchschnitte mit der Verlängerung von AD den Mittelpunkt und Halbmesser des gesuchten Kreises bestimmt.

Digitized by Google

7. Auflösung.

Analysis. Nachdem D auf die bisherige Weise bestimmt worden, ergänze den Bogen CB zum Halbkreise CBH,



so ist DG = GE, DA = AH, also DG : GE = DA : AH; da nun GE ‖ AH ist, so liegen D, E, H in gerader Linie; also da D und H gegeben sind, so ist auch E, folglich der auf AB in E errichtete Perpendikel EG und sein Durchschnitt G mit AD gegeben.

Konstruktion. Halbire BAC durch AD, welches den Bogen BC in D treffe; verlängere den Bogen CB über B hinaus bis zum Halbkreise CBH, ziehe HD, welches AB in E treffe, und errichte auf AB in E einen Perpendikel, welcher AD in G treffe, so ist G Mittelpunkt und GD oder GE Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis. Da EG ‖ AH ist, weil beide auf AB senkrecht sind, so ist GD : GE = AD : AH; aber AD = AH, also GD = GE; woraus sich das Uebrige wie früher ergibt.

Zusatz 1. Den äußern Berührungskreis erhält man, wenn man DC statt DH zieht, und DC über D hinaus bis zum Durchschnitte mit der Verlängerung von AB verlängert.

Zusatz 2. Es ergibt sich sowohl aus der Natur der Aufgabe, als aus sämmtlichen Analysen und Konstruktionen, daß hier keine Determination nöthig ist.

Mit vorstehenden sieben Auflösungen ist natürlich die Zahl der möglichen Fälle noch lange nicht erschöpft. Es möchte zu weit führen, in gleicher Ausdehnung noch weitere Auflösungen ausführlich zu geben. Zur Uebung für den Schüler dürfte es

Digitized by Google

aber doch von Interesse sein, Weiteres wenigstens anzudeuten, und es dem eigenen Eifer zu überlassen, Figuren, Analysis, Konstruktion und Beweis nach den gegebenen Vorbildern auszuführen.

Auf eine 8. Auflösung führt die Betrachtung der Figur zur 3. Auflösung, aus der sich ergibt, daß, wenn D bestimmt ist, H durch einen von D als Mittelpunkt mit DA als Halbmesser beschriebenen Bogen gefunden wird, worauf wie dort alsdann F und G sich ergibt.

Ebenso erhält man eine 9. Auflösung, wenn man z. B. in der Figur zur 4. Auflösung auf AD einen beliebigen Punkt L annimmt, von L auf AC einen Perpendikel LM fällt, hierauf LN = LM auf LD abschneidet, MN zieht, und durch D eine Parallele mit MN legt, wodurch F bestimmt wird.

Aus dieser ergibt sich durch weitere Betrachtung eine 10. Auflösung, wenn man wie im Vorigen den Perpendikel LM fällt, und ihn so, wenn nöthig, nach O verlängert, daß LO = LD wird. Durch Ziehen von DO wird hierauf unmittelbar F als Durchschnitt mit AC bestimmt.

Da es sich (s. Figur zur 1. Auflösung) darum handelt, an AD in D einen Winkel = $^1/_4$R anzulegen, um den Punkt F zu bestimmen, so erhält man eine 11. Auflösung dadurch, daß man den Winkel BAD halbirt, und durch D eine Parallele mit der Halbirungslinie zieht, wodurch F bestimmt wird.

Ferner ergibt sich durch Betrachtung der Figur zur 6. Auflösung, daß AFGE ein Quadrat, also wenn EF gezogen wird, EF = AG ist. Auch ist EF ∥ BC, wenn letzteres gezogen wird. Weitere Betrachtungen zeigen, daß, weil GD = GF = AE ist, auch EB = AG = EF werden muß, woraus sich, wenn BF gezogen wird, ABF = $^1/_4$R ergibt. Daraus ergibt sich eine 12. Auflösung, indem man BC zieht und ABC halbirt, wodurch unmittelbar der Punkt F bestimmt wird.

Eine der 10. Auflösung analoge 13. Auflösung erhält man, wenn man BA über A hinaus zum Durchmesser des ganzen Kreises verlängert und den Endpunkt desselben mit D verbindet, wodurch als Durchschnitt dieser Verbindungslinie mit AC der Punkt F bestimmt wird.

Digitized by Google

Weitere Auflösungen ergeben sich durch Anwendung folgenden Lehrsatzes, für welchen der Beweis leicht gefunden werden kann: Wenn man den Ueberschuß der Diagonale eines Quadrats über die Seite desselben von der Quadratseite abschneidet, so wird dadurch diese Seite in zwei Theile getheilt, von denen der kleinere wieder gleich der Seite, der größere aber gleich der Diagonale eines neuen Quadrats ist. Wenn man nun in Betrachtung zieht, daß, wenn BC gezogen wird, △ ABC die Hälfte eines Quadrats ist, von dem BC Diagonale ist, so ergibt sich als 14. Auflösung, daß man CA über A hinaus so nach M verlängert, daß CM = CB wird, und AE = AM von AB abschneidet, wodurch E und hierauf G bestimmt wird.

Diese Auflösung läßt sich ferner so abändern, daß eine 15. Auflösung erscheint, indem man AC über A hinaus nach K zum Durchmesser ergänzt, von C mit CB als Halbmesser einen Bogen beschreibt, der CK in M trifft, und von AD ein Stück AG = MK abschneidet, wodurch unmittelbar der Mittelpunkt G des gesuchten Kreises gefunden wird.

u. s. w.

Zur Uebung für den Schüler möge es weiter dienen, in allen diesen Fällen zu untersuchen, wie die Konstruktion abgeändert werden muß, damit der äußere Kreis gefunden wird, welcher den Bogen von Außen und die beiden Halbmesser in der Verlängerung berührt. Dazu wird namentlich auch der für die 14. und 15. Auflösung gegebene Lehrsatz abzuändern und ein analoger Lehrsatz zu finden sein, bei dem es sich nicht um die Differenz, sondern um die Summe der Diagonale und der Seite eines Quadrats handelt.

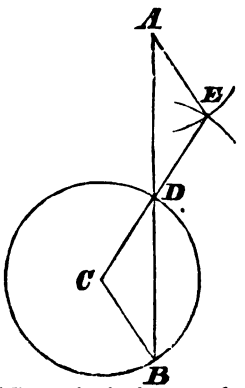
II. Aufgabe.

Von einem gegebenen Punkte A außerhalb eines gegebenen Kreises durch denselben eine Sekante so zu ziehen, daß das außerhalb des Kreises liegende Stück derselben dem in den Kreis fallenden gleich werde.

Digitized by Google

1. Auflösung.

Analysis. Es sei A der gegebene Punkt, C der Mittelpunkt des gegebenen Kreises und AB die gesuchte Sekante, welche die Eigenschaft habe, daß AD = DB sei. Ziehe CD, CB, und verlängere CD so nach E, daß DE = CD ist, endlich ziehe AE. Da CD = DE, BD = AD und CDB = ADE ist, so ist △ CDB ≅ △ ADE; also AE = CB; also ist AE gegeben; da nun auch CE = 2 CD, also die Entfernung des Punktes E von A und C gegeben ist, so ist E gegeben; folglich ist CE, also auch D, also AD und daher auch B gegeben.*)



Konstruktion. Von A als Mittelpunkt beschreibe mit einem Halbmesser gleich dem des gegebenen Kreises und von C als Mittelpunkt mit einem doppelt so großen Halbmesser Kreisbögen, die sich in E schneiden, ziehe CE, welches den gegebenen Kreis in D schneide; ziehe AD und verlängere es, bis es den Kreis in B trifft, so ist AB die verlangte Sekante.

Beweis. Ziehe BC und AE, so ist BC = AE, CE = 2 CD, also CD = DE, und CDB = ADE; aber weil CD = CB,

*) Zur obigen Analysis gelangt man vielleicht noch leichter, wenn man AC zieht, wodurch in △ ACB zwei Seiten AC, CB und die zur dritten Seite gehörige Mittellinie CD der Größe nach als gegeben betrachtet werden können. Wendet man hierauf denselben Kunstgriff an wie Seite 36, indem man die Mittellinie CD um ihre eigene Länge nach E verlängert, so ergibt sich weiter die obige Analysis. Es möge bei dieser Gelegenheit überhaupt darauf hingewiesen werden, daß in den meisten Fällen, wo unter den Bedingungen für die Konstruktion eines Dreiecks eine Mittellinie sich befindet, die Verdoppelung dieser Mittellinie, also die Ergänzung des Dreiecks zu einem Parallelogramm für die Analysis förderlich ist.

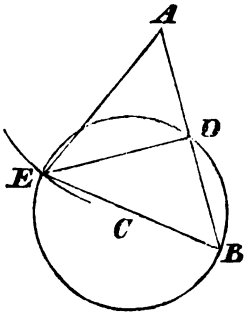
Digitized by Google

und daher auch DE = AE, also CDB = CBD und ADE = DAE ist, auch CBD = DAE; daher ist △ CBD ≅ △ EAD, und daher BD = AD.

Determination. Damit die von A und C als Mittelpunkten beschriebenen Kreisbögen einen Punkt E gemein haben, darf die Entfernung des Punktes A von dem Mittelpunkte C des Kreises nicht größer sein als das Dreifache von dem Halbmesser des gegebenen Kreises.

2. Auflösung.

Analysis. Da AB in D halbirt ist, so ist ein auf AB in D errichteter Perpendikel der geometrische Ort für alle Punkte, welche von A und B gleichweit entfernt sind; schneidet derselbe also den Kreis noch einmal in E, so ist, wenn AE und BE gezogen werden, AE = BE; da nun aber BDE = 90° ist, so ist BE Durchmesser; daher ist AE auch gleich dem Durchmesser; folglich ist AE der Größe nach, also E, mithin auch der Durchmesser EB, folglich B, und daher auch AB gegeben.



Konstruktion. Von A als Mittelpunkt beschreibe mit einem Halbmesser gleich dem Durchmesser des gegebenen Kreises einen Bogen, der den gegebenen Kreis in E schneide; von E ziehe den Durchmesser EB, und ziehe AB, welches den Kreis in D schneide, so ist AB die gesuchte Sekante.

Beweis. AE = BE, also △ AEB gleichschenklig; nun ist, wenn ED gezogen wird, EDB = R als Winkel im Halbkreise; mithin ist ED der von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel; folglich halbirt er die Grundlinie, oder es ist AD = BD.

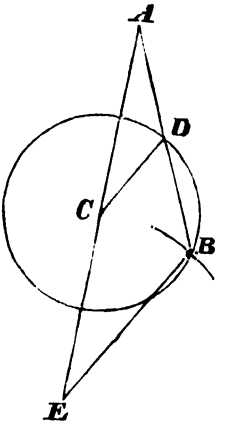
Determination. Damit der von A mit dem Durchmesser BE als Halbmesser beschriebene Kreis den gegebenen

Digitized by Google

Kreis treffe, darf die kleinste von A an den Kreis gezogene Linie (deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht) nicht größer als BE, also die Entfernung des Punktes A vom Mittelpunkte C nicht größer als das Dreifache des Halbmessers sein.

3. Auflösung.

Analysis. Es sei wieder AB die gesuchte Sekante, ziehe AC, CD und durch B eine Parallele mit CD, bis sie die Verlängerung von AC in E trifft, so ist $\triangle$ ACD $\sim$ $\triangle$ AEB, also AC : AE = CD : EB = AD : AB; aber AB = 2 AD, also auch AE = 2 AC und EB = 2 CD; folglich da AC und CD der Größe nach gegeben sind, so sind auch AE und EB der Größe nach gegeben; also ist E gegeben, folglich auch B und daher AB.



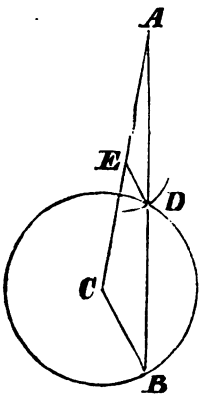
Konstruktion. Ziehe AC und verlängere es nach E so, daß CE = AC wird; von E als Mittelpunkt beschreibe mit einem Halbmesser gleich dem Durchmesser des gegebenen Kreises einen Kreisbogen, der den Kreis in B schneide, und ziehe AB, welches den Kreis in D schneide, so ist AB die gesuchte Sekante.

Beweis. Ziehe EB und durch C eine Parallele mit EB, welche AB in X schneide, so ist AB in X halbirt, weil AE in C halbirt ist; ebenso ist CX = $^1/_2$ EB, also ist CX Halbmesser des gegebenen Kreises; folglich fällt X mit D zusammen; also ist AB in D halbirt.

Determination. Durch dieselbe Betrachtung wie in der zweiten Auflösung ergibt sich, daß E, also auch A von C nicht weiter entfernt sein darf als um den dreifachen Halbmesser des gegebenen Kreises.

Digitized by Google

4. Auflösung.



Analysis. Es sei wieder AB die gesuchte Sekante, ziehe BC und durch D eine Parallele mit BC, bis sie AC in E trifft, so ist wie in der vorigen Analysis AE = ½ AC und DE = ½ BC, also E, und dadurch D, folglich AD, also auch AB gegeben.

Konstruktion. Ziehe AC, halbire AC in E und beschreibe von E als Mittelpunkt mit einem Halbmesser, welcher halb so groß als der des gegebenen Kreises ist, einen Bogen, der den gegebenen Kreis in D trifft; ziehe AD und verlängere es nach B, so ist AB die gesuchte Sekante.

Beweis. Ziehe ED und durch C eine Parallele mit ED, welche die Verlängerung von AD in X treffe, so ist $\triangle AED \sim \triangle ACX$, also weil $AE = \frac{1}{2} AC$ ist, auch $AD = \frac{1}{2} AX$, und $ED = \frac{1}{2} CX$. Da nun ED gleich der Hälfte des gegebenen Halbmessers ist, so ist CX gleich dem gegebenen Halbmesser, oder X liegt auf der Peripherie und fällt folglich mit B zusammen. AB ist daher in D halbirt.

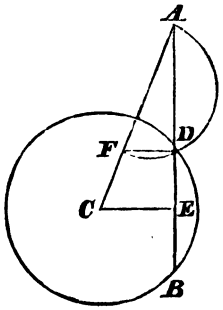
Determination. Durch gleiche Betrachtungen wie bei Auflösung 2 und 3 ergibt sich, daß EC nicht größer sein darf als 3 ED, also 2 EC oder AC nicht größer als 3 CB.

5. Auflösung.

Analysis. Ziehe wieder AC, von C fälle auf BD den Perpendikel CE, wodurch BD in E halbirt wird, und errichte auf AB in D einen Perpendikel, welcher AC in F treffe, so ist DF ∥ EC, also AE : DE = AC : CF; aber DE = ⅓ AE; also auch CF = ⅓ AC; folglich ist der Punkt F gegeben; da

Digitized by Google

nun ADF = R ist, also D auf dem über AF beschriebenen Halbkreise liegt, so ist auch D, also auch B gegeben.



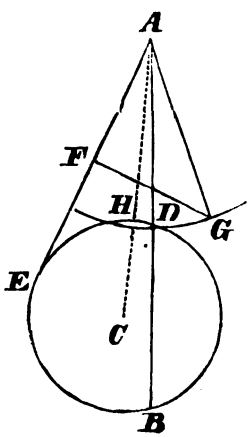
Konstruktion. Ziehe AC und schneide von ihm CF = ⅓ AC ab; über AF als Durchmesser beschreibe einen Halbkreis, der den gegebenen Kreis in D schneide, ziehe AD und verlängere es nach B, so ist AB die gesuchte Sekante.

Beweis. Ziehe FD und fälle von C den Perpendikel CE auf BD, so ist FDA = R, also FD ‖ CE, und daher FC : AC = DE : AE; aber FC = ⅓ AC, also DE = ⅓ AE, und daher DE = ½ AD; aber DB = 2 DE, also DB = AD.

Determination. Damit der über AF beschriebene Halbkreis noch einen Punkt mit dem gegebenen Kreise gemeinschaftlich habe, darf F nicht außerhalb des Kreises liegen, da A nach der Bedingung außerhalb liegt; also darf FC nicht größer als der Halbmesser, mithin AC nicht größer als der dreifache Halbmesser des gegebenen Kreises sein.

6. Auflösung.

Analysis. Ziehe von A an den gegebenen Kreis die Tangente AE, so ist E gegeben; nun ist AE^2 = AD . AB = AD . 2 AD = 2 AD^2, oder AD^2 = ½ AE^2; also ist AD, folglich D, folglich auch B gegeben.



Konstruktion. Von A ziehe an den gegebenen Kreis die Tangente AE, halbire AE in F, und errichte auf AE in F einen Perpendikel FG = AF, ziehe AG und beschreibe von A als Mittelpunkt mit AG als Halbmesser einen Kreisbogen, der

Digitized by Google

den gegebenen Kreis in D treffe: ziehe AD und verlängere es nach B, so ist AB die gesuchte Sekante.

Beweis. $AB \cdot AD = AE^2 = 4AF^2 = 2AF^2 + 2FG^2 = 2AG^2 = 2AD^2$; also $AB = 2AD$.

Determination. Ziehe AC, welches den Kreis in H treffe; damit der von A als Mittelpunkt mit AG als Halbmesser beschriebene Kreis mit dem gegebenen einen Punkt gemeinschaftlich habe, darf AG nicht kleiner als die kleinste von A an den Kreis gezogene gerade Linie, also nicht kleiner als AH sein; es muß also sein

$AH \leqq AG$; also

$AH^2 \leqq AG^2 \leqq \frac{1}{2} AE^2$; also

$2AH^2 \leqq AE^2$; also

$2AH^2 + CH^2 \leqq AE^2 + CE^2$ (weil CH = CE ist),

$\leqq AC^2$

$\leqq AH^2 + CH^2 + 2AH \cdot CH$; also

$AH^2 \leqq 2AH \cdot CH$, und daher

$AH \leqq 2CH$; also

$AH + CH \leqq 3CH$, d. h.

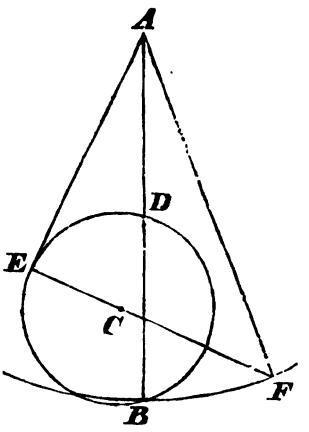
$AC \leqq 3CH$.

7. Auflösung.

Analysis. Ziehe wieder von A an den gegebenen Kreis die Tangente AE, so ist $AE^2 = AD \cdot AB = \frac{1}{2} AB \cdot AB = \frac{1}{2} AB^2$, also $AB^2 = 2\,AE^2$. Nun ist AE, also AE^2, also auch $2\,AE^2$ gegeben; folglich ist auch AB^2, also AB, also auch B gegeben.

Digitized by Google

Konstruktion. Von A ziehe an den gegebenen Kreis die Tangente AE, errichte auf AE in E einen Perpendikel EF = AE, und ziehe AF; endlich beschreibe von A als Mittelpunkt mit AF als Halbmesser einen Kreisbogen, der den gegebenen Kreis in B schneide, und ziehe AB, so ist AB die gesuchte Sekante.



Beweis. AB schneide den Kreis noch einmal in D, so ist $AB \cdot AD = AE^2 = \frac{1}{2} AF^2 = \frac{1}{2} AB^2$; also $AD = \frac{1}{2} AB$.

Determination. Durch ähnliche Schlüsse wie bei der vorigen Auflösung ergibt sich wieder, daß AC nicht größer als der dreifache Halbmesser sein darf.

Zusatz 1. Bei sämmtlichen Konstruktionen zeigt sich, daß in allen Fällen, in welchen AC kleiner als der dreifache Halbmesser ist, zwei Durchschnitte der Kreisbögen mit dem gegebenen Kreise stattfinden, also zwei Sekanten von der verlangten Eigenschaft möglich sind.

Zusatz 2. Sämmtliche Auflösungen der II. Aufgabe sind zugleich Lösungen der Aufgabe: durch einen gegebenen Punkt auf der Peripherie des größeren von zwei concentrischen Kreisen eine Chorde in denselben zu legen, die von der Peripherie des kleinern Kreises in drei gleiche Theile getheilt wird.

Auch diese II. Aufgabe ist mit vorstehenden 7 Auflösungen nicht abgeschlossen. Es wird aber auch hier genügen, dem Schüler in Folgendem weitere Auflösungen nur anzudeuten.

Eine 8. **Auflösung** erhält man durch Betrachtung der Figur zur 2. Auflösung. Wenn nemlich der Punkt E wie dort bestimmt ist, so kann weiter der Punkt D statt des Punktes B dadurch bestimmt werden, daß über AE als Durchmesser ein Halbkreis beschrieben wird, der den gegebenen Kreis in D schneidet.

Digitized by Google

Ebenso ergibt sich aus derselben Figur eine 9. Auflösung, wenn man nach Bestimmung von E den Punkt D dadurch bestimmt, daß man durch den Mittelpunkt C eine Parallele mit AE zieht, bis sie den gegebenen Kreis in D schneidet.

Ferner führt die nähere Betrachtung der Figur zur 5. Auflösung zu folgenden zwei weiteren:

10. Auflösung. Wenn AC gezogen ist, so verlängere dasselbe so über C hinaus nach X, daß CX = $^1/_3$ AC wird und beschreibe über AX als Durchmesser einen Halbkreis, der den gegebenen Kreis in B schneide.

11. Auflösung. Nachdem wie in der 5. Anflösung F bestimmt worden ist, so beschreibe von F als Mittelpunkt mit FA als Halbmesser einen Bogen, welcher den gegebenen Kreis in B schneiden wird.

Auch durch nähere Betrachtung und Anwendung des Satzes über die Mittellinien im Dreiecke erhält man eine 12. Auflösung, welche von den bisherigen nicht unwesentlich verschieden ist. Zieht man nemlich AC, halbirt es in X, beschreibt von A als Mittelpunkt mit AX als Halbmesser und von C als Mittelpunkt mit einem Halbmesser, der gleich dem $1^1/_2$fachen des gegebenen Kreishalbmessers ist, zwei Bögen, die sich in Y schneiden, so wird, wenn CY gezogen wird, durch dessen Durchschnitt mit dem gegebenen Kreise der Punkt D bestimmt. Der Beweis wird dadurch geführt, daß AY gezogen, um YZ = AY verlängert und CZ gezogen wird, wodurch der oben angedeutete Satz über die Mittellinien seine Anwendung findet.

u. s. w.

Es bleibt dem Schüler überlassen, zu den vorliegenden Auflösungen, nach den gegebenen Andeutungen, Analysis und Beweis auszuführen. Auch sollte für dieselben die Determination als gute Uebung nicht vergessen werden.

III. Aufgabe.

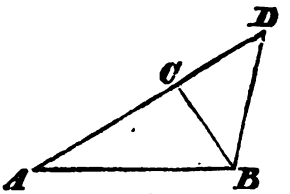
Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben sind eine Seite = a, der gegenüberliegende

Digitized by Google

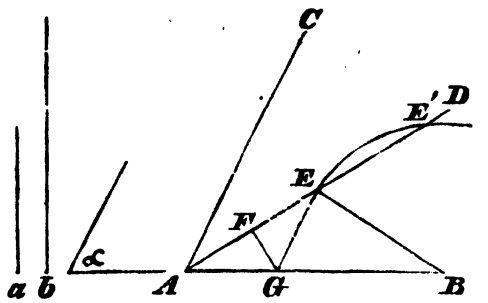
Winkel = α und die Summe der beiden andern Seiten = b.*)

1. Auflösung.

Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, von welchem AB, ACB und AC + BC gegeben sei; verlängere AC nach D so, daß CD = CB sei, so ist AD = AC + CB, also die Punkte A und D gegeben; da ferner CD = CB, also CDB = CBD und daher CDB = ½ACB ist, so ist auch CDB gegeben; also ist die Lage von DB gegen AD gegeben; da AB der Größe nach, also die Entfernung des Punktes B von A gegeben ist, so ist auch B auf BD gegeben; nun liegt C auf AD und ist von B und D gleichweit entfernt; folglich ist auch C gegeben.



Konstruktion. An AB = b lege in A einen Winkel BAC = α, halbire denselben durch AD und beschreibe von B als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = a einen Kreisbogen, der AD in E (oder E') schneide; ziehe BE, und errichte auf AE im Halbirungspunkte F einen



*) Obige Aufgabe ist gewählt worden, theils wegen ihrer Beziehung zur folgenden, theils um gerade an dieser beinahe in allen Beispielsammlungen vorkommenden Aufgabe zu zeigen, wie der verschiedene Gang der Analysis auf verschiedene Auflösungen führe; denn es geben wohl fast alle Aufgabensammlungen nur die erste der hier gegebenen drei Auflösungen.

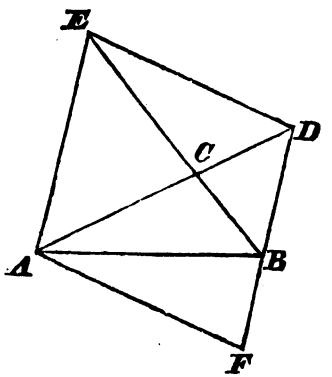
Digitized by Google

Perpendikel FG, der AB in G treffe; endlich ziehe EG, so ist △ BEG das gesuchte. Ebenso erhält man das gesuchte Dreieck durch Benützung des Punktes E'.*)

Beweis. BE = a; EG = AG, weil G auf dem im Halbirungspunkte auf AE errichteten Perpendikel liegt, also BG + EG = BG + AG = AB = b; endlich ist GEA = GAE = CAD; also EG ∥ AC, und daher EGB = CAB = α.

2. Auflösung.

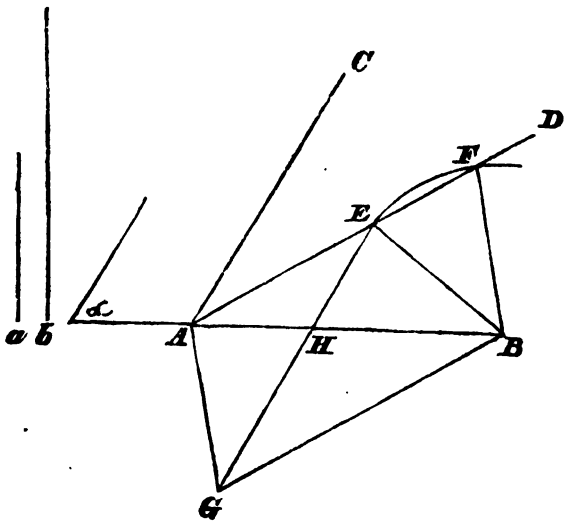
Analysis. ABC sei das gesuchte Dreieck, und wieder AB, ACB und AC + CB gegeben. Verlängere AC nach D so, daß CD = CB wird, und BC nach E so, daß CE = CA wird, und ziehe BD, DE, AE, so ist AD = BE = AC + CB; ferner ist wie oben ADB = AEB = ½ACB, aber auch CBD = CDB = ½ACB, also AEB = EBD, und daher AE ∥ BD; nun ist △ ECD ≅ △ ACB, weil EC = AC, CD = CB und ECD = ACB ist; also ist ED = AB; daher ist ABDE ein gleichseitiges Trapez, von welchem die beiden einander nicht-parallelen aber gleichen Seiten AB, DE, die beiden einander gleichen Diagonalen AD, BE und die Winkel, welche letztere mit den parallelen Seiten machen, gegeben sind. Letzteres aber wird am besten konstruirt, indem man es zu dem Parallelogramme AFDE ergänzt, von welchem gegeben ist eine Seite AF = DE = AB, eine Diagonale AD = AC + CB, nnd der Winkel ADF = ½ACB, welchen letztere mit der andern Seite macht.



*) Statt auf AE den Halbirungsperpendikel FG zu errichten, hätte man auch EG ∥ AC ziehen können, wodurch sich der Beweis nur wenig abgeändert hätte.

Digitized by Google

Konstruktion. An AB = b lege in A einen Winkel BAC = α, halbire denselben durch AD, und beschreibe von B als Mittelpunkt mit a als Halbmesser einen Kreisbogen, der AD in E und F schneide, ziehe BE, BF, und durch B und A Parallelen mit AF und BF, bis sie sich in G schneiden;



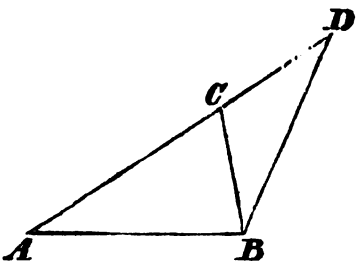
endlich ziehe EG, welches AB in H schneide, so ist △ BHE das gesuchte.

Beweis. BE = a. Da BF ∥ AG ist, so ist BFA + GAF = 2R; nun ist BF = BE, also BFE = BEF; also ist auch BEF + GAF = 2R; aber BEF + BEA = 2R, also BEA = GAE; nun ist BE = BF = AG und AE = AE; daher ist △ BEA ≅ △ GAE, und daher BAE = GEA; also ist EH = AH, und daher BH + EH = BH + AH = AB = b; endlich ist GEA = BAE = CAE, also EH ∥ AC und daher BHE = BAC = α.

3. Auflösung.

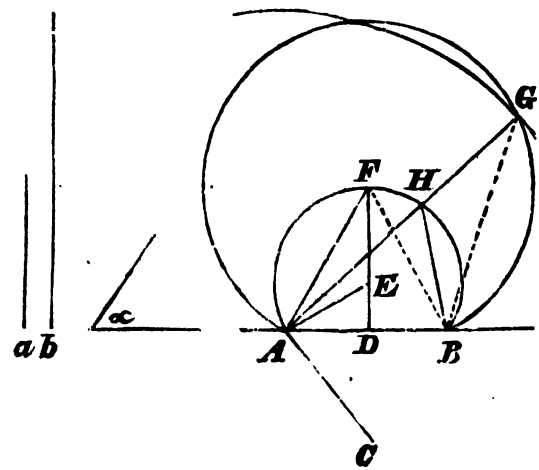
Analysis. Es sei wieder ABC das gesuchte Dreieck und AB, ACB, AC + CB gegeben; verlängere wieder AC so

Digitized by Google



nach D, daß CD = CB wird, so ist AD gegeben; ebenso ist wie oben ADB = ½ACB gegeben. Da AB und ACB gegeben ist, so ist ein über AB konstruirbarer Kreisabschnitt gegeben, der den Winkel ACB faßt, auf dessen Peripherie also C liegen muß; da ebenso ADB = ½ ACB gegeben ist, so ist ebenfalls ein über AB konstruirbarer Kreisabschnitt gegeben, der den Winkel ½ ACB faßt, und auf dessen Peripherie D liegen muß; da nun auch AD, also die Entfernung des Punktes D von A gegeben ist, so ist der Punkt D auf der Peripherie dieses zweiten Abschnitts, also AD, also auch sein Durchschnitt mit der Peripherie des ersten Abschnittes, also C, also △ ABC gegeben.

Konstruktion. Ueber AB = a als Chorde konstruire zwei Kreisabschnitte, von denen der eine den Winkel α, der andere den Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ faßt, was am einfachsten auf folgende Weise geschieht: an AB lege in A einen Winkel BAC = α; auf AB errichte im Halbirungspunkte D und auf AC in A Perpendikel, welche sich in E schneiden; von E als Mittelpunkt beschreibe mit EA als Halbmesser einen Kreisbogen, der durch B gehen wird, weil E von A und B gleichweit entfernt ist; dieser Kreis-



Digitized by Google

bogen schneide die Verlängerung des Perpendikels DE über E hinaus in F, ziehe FA, und beschreibe von F als Mittelpunkt mit FA als Halbmesser einen zweiten Kreisbogen, der ebenfalls durch B gehen wird, da auch F von A und B gleichweit entfernt ist. Von A als Mittelpunkt beschreibe hierauf mit b als Halbmesser einen Kreisbogen, der den zweiten in G schneide, ziehe AG, welches den ersten in H schneide; endlich ziehe BH, so ist △ ABH das gesuchte.

Beweis. AB = a; da AB Chorde und AC Tangente des ersten Kreisabschnitts AFHB ist, so ist AHB = BAC = α, aber F ist Mittelpunkt, also AFB Centriwinkel des Kreisabschnitts AGB, also ist AGB = $^1/_2$ AFB = $^1/_2 \alpha$; aber HGB + HBG = AHB = α; also ist auch HBG = $^1/_2 \alpha$; also ist HGB = HBG, und daher HB = HG, also AH + HB = AH + HG = AG = b.

Zusatz. Die Determination dieser Aufgabe (sowie der meisten folgenden) bleibt dem Schüler überlassen mit besonderer Berücksichtigung dessen, was Seite 34 und 35 bemerkt wurde.

IV. Aufgabe.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Hypotenuse und die Summe beider Katheten gegeben sind.

1. 2. 3. Auflösung.

Da obige Aufgabe nur als spezieller Fall der vorangegangenen betrachtet werden muß, indem hier der Winkel, welcher der gegebenen Seite gegenüber liegt, ein rechter ist, so finden die drei Auflösungen der vorigen Aufgabe unter den einfachen Modifikationen, welche sich für den besondern Fall ergeben, auch hier ihre Anwendung. Da z. B. bei der dritten Auflösung der AB gegenüberliegende Winkel ein rechter ist, so ist einfach über AB als erster Kreisabschnitt ein Halbkreis

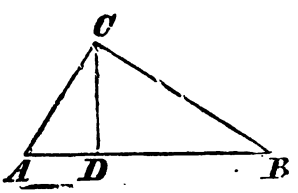
Digitized by Google

zu beschreiben, und dann, wie weiter angegeben ist, zu verfahren.

Es liegt jedoch die Vermuthung sehr nahe, daß außer diesen allgemeinen Auflösungen noch besondere auf das rechtwinklige Dreieck speziell passende zu finden sein werden, sowie daß diese Auflösungen mit dem wichtigsten Lehrsatze, der sich auf das rechtwinklige Dreieck bezieht, in Zusammenhang stehen werden, nemlich mit dem sogenannten pythagorischen Lehrsatze. Darauf gründen sich auch wirklich die folgenden Auflösungen, deren Analysis sich der Schüler um so mehr genau zu merken hat, als der in derselben verfolgte Gang streng im Geiste der alten Analytiker ist, und dabei für Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck sehr häufig auf — theilweise sehr einfache — Lösungen führt. Als Beispiel der letzteren Bemerkung ist vorzugsweise die folgende fünfte Aufgabe gewählt worden. Der Hauptkunstgriff der hieher gehörigen Analysen ist, wie sich in dieser und der folgenden Aufgabe zeigt, der, daß das Rechteck aus beiden Katheten dem Rechtecke aus der Hypotenuse und dem zu ihr gehörigen Höhenperpendikel gleichgesetzt wird (weil beide dem doppelten Flächeninhalte des Dreiecks gleich sind), und daß demgemäß das eine Rechteck mit dem andern vertauscht wird.

4. Auflösung.

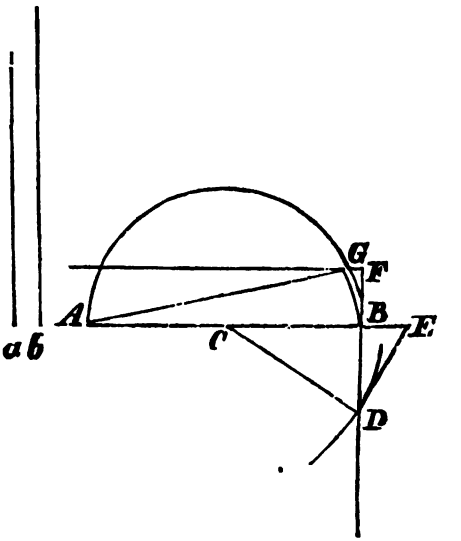
Analysis. Es sei ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck, von welchem AB und AC + BC gegeben seien. Nach dem pythagorischen Lehrsatze ist $AC^2 + BC^2 = AB^2$, also $AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC = AB^2 + 2AB \cdot CD$ (wenn von C auf AB der Perpendikel CD gefällt wird), d. h. $(AC + BC)^2 = AB^2 + 2AB \cdot CD = 2AB(\frac{1}{2}AB + CD)$, also $\frac{1}{4}(AC + BC)^2 = \frac{1}{2}AB(\frac{1}{2}AB + CD)$; nun ist AC + BC, also auch $\frac{1}{4}(AC + BC)^2$, folglich auch $\frac{1}{2}AB(\frac{1}{2}AB + CD)$ gegeben; aber $\frac{1}{2}AB$ ist gegeben, also ist auch CD gegeben; folglich ist die Aufgabe auf



Digitized by Google

die einfache reduzirt, ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Hypotenuse und der dazu gehörige Höhenperpendikel gegeben sind.

Konstruktion. Es sei a die gegebene Hypotenuse, b die gegebene Summe der Katheten; halbire AB = a in C; errichte auf AB in B einen Perpendikel, und beschreibe von C als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = $^1/_2$ b einen Kreisbogen, der diesen Perpendikel in D schneide; ziehe CD und errichte auf demselben in D einen Perpendikel, der die Verlängerung von AB in E treffe; über AB beschreibe einen Halbkreis; verlängere DB nach F so, daß BF = BE wird, ziehe durch F eine Parallele mit AB, bis sie den Halbkreis in G trifft, und ziehe AG, BG, so ist △ ABG das verlangte.



Beweis. AGB = R als Winkel im Halbkreise, AB = a; ferner ist $AG^2 + BG^2 = AB^2$, also $AG^2 + BG^2 + 2AG \cdot BG = AB^2 + 2AB \cdot BF$, d. h. $(AG + BG)^2 = AB^2 + 2AB \cdot BF = 4BC^2 + 4BC \cdot BF = 4BC\,(BC + BF) = 4BC\,(BC + BE) = 4BC \cdot CE = 4CD^2 = 4 \cdot {}^1/_4 b^2 = b^2$; also ist AG + BG = b.

Determination. 1) Damit $(AG + BG)^2 = AB^2 + 2AB \cdot BF$ sei, muß $(AG + BG)^2 > AB^2$, also AG + BG > AB, d. h. b > a sein; 2) damit die durch F gezogene Parallele mit AB den Halbkreis in einem Punkte treffe, darf BF nicht größer als $^1/_2$ AB, also muß

Digitized by Google

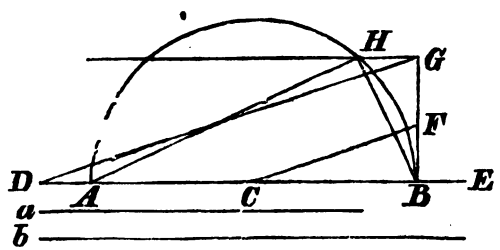
$(AG + BG)^2 \leqq AB^2 + 2AB \cdot {}^1/_2 AB \leqq AB^2 + AB^2 \leqq 2AB^2$

sein, d. h. b darf nicht größer sein als die Diagonale des Quadrats von a.

5. Auflösung.

Analysis. Nachdem die Analysis wie bei Auflösung 4 bis zu dem Punkte geführt worden ist, daß man erhielt $(AC + BC)^2 = AB^2 + 2AB \cdot CD$, so folgt daraus: $(AC + BC)^2 - AB^2 = 2AB \cdot CD$, oder wenn $AC + BC = b$, $AB = a$ gesetzt wird, $b^2 - a^2 = 2a \cdot CD$; mithin ${}^1/_4 b^2 - {}^1/_4 a^2 = {}^1/_2 a \cdot CD$, d. h. $({}^1/_2 b + {}^1/_2 a)({}^1/_2 b - {}^1/_2 a) = {}^1/_2 a \cdot CD$; oder ${}^1/_2 a : {}^1/_2 b - {}^1/_2 a = {}^1/_2 b + {}^1/_2 a : CD$; da in dieser Proportion die drei ersten Glieder bekannt sind, so kann das vierte gefunden werden; worauf die Analysis wie im Vorigen schließt.

Konstruktion. AB = a halbire in C, verlängere CA und CB über A und B so nach D und E, daß CD = ${}^1/_2$b und CE = ${}^1/_2$b ist; auf AB errichte in B einen



Perpendikel BF = BE, ziehe CF und durch D eine Parallele mit CF, bis sie die Verlängerung von BF in G trifft; über AB beschreibe hierauf einen Halbkreis und ziehe durch G eine Parallele mit AB, bis sie den Halbkreis in H trifft; endlich ziehe AH und BH, so ist △ ABH das verlangte.

Beweis. AB = a, AHB = R; ferner ist $AH^2 + BH^2 = AB^2$; also $AH^2 + BH^2 + 2AH \cdot BH = AB^2 + 2AB \cdot BG$, d. h. $(AH + BH)^2 = AB^2 + 2AB \cdot BG = AB^2 + 4CB \cdot BG = AB^2 + 4BD \cdot BF$ (weil CB : BF = BD : BG, also CB . BG = BD . BF ist) $= AB^2 + 4BD \cdot BE = 4AC^2 + 4(CD + CB)(CE - CB) = 4AC^2 + 4(CD + BC)$

Digitized by Google

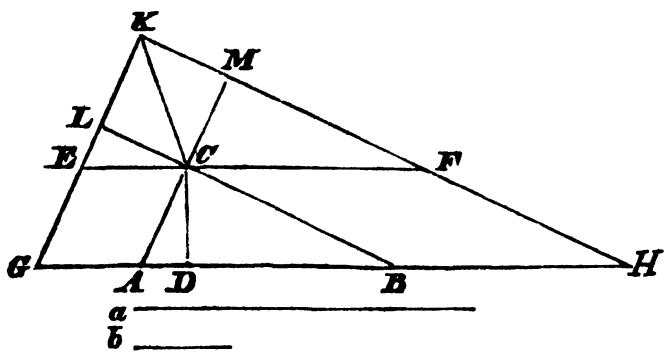
(CD — CB) (weil CD = CE ist) = $4AC^2 + 4CD^2 - 4CB^2 = 4CD^2 = 4 \cdot {}^1/_4 b^2 = b^2$; also ist AH + BH = b.

V. Aufgabe.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Summe beider Katheten = a und der Höhenperpendikel = b gegeben sind.

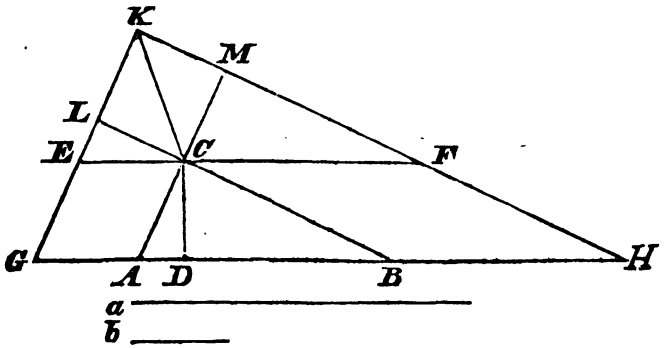
1. Auflösung.

Analysis. ABC sei das gesuchte Dreieck, von welchem



AC + BC und CD gegeben seien. Das gewöhnliche Verfahren, nach welchem man die gegebene Summe dadurch darstellt, daß man entweder AC um BC oder BC um AC über C hinaus verlängert, würde hier zu keinem Ziele führen, da von der Lage dieser Summe gegen die gegebene Höhe CD nichts bekannt ist. Man zieht hier passender durch C eine Parallele mit AB, und macht CE = CA, CF = CB, so ist EF = AC + BC gegeben. Man ergänze hierauf die durch ECA und FCB bestimmten Rhomben CEGA, CFHB, indem man durch E und F Parallelen mit CA und CB zieht, bis sie die Verlängerungen von AB in G und H treffen, und verlängere GE und GF, bis sie sich in K schneiden, so ist EKF = ACB = R.

Digitized by Google



Zieht man endlich CK und fällt von C auf GK und HK Perpendikel CL und CM, so ergibt sich leicht, daß CL = CM = CD ist, weil CE = CA, CLE = CDA = R, und CEL = EGA = CAD, also △ CEL ≅ △ CAD und aus gleichen Gründen △ CFM ≅ CBD ist. Da nun MKL = CLK = CMK = R, also auch LCM = R, und CL = CM ist, so ist CLKM ein Quadrat, dessen Seite = CD, also gegeben ist; mithin ist auch seine Diagonale CK gegeben, und zugleich wird LKM oder EKF durch CK halbirt. Daher ist △ EFK nach Seite 50 bestimmt, da EF, EKF und CK gegeben sind, d. h. obige Aufgabe ist auf die Seite 50 gelöste reduzirt: ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben sind eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Halbirungslinie dieses Winkels.

Konstruktion. Nachdem (nach Seite 50) △ EFK so konstruirt worden, daß die Seite EF gleich der gegebenen Summe a beider Katheten, der gegenüberliegende Winkel EKF = R und die Halbirungslinie KC des Winkels EKF gleich der Diagonale des über der gegebenen Höhe b beschriebenen Quadrates gemacht wurde, errichte auf EF in C den Perpendikel CD = b, ziehe durch D eine Parallele mit EF, und durch C Parallelen mit EK und FK, bis sie die erste Parallele in A und B schneiden, so ist △ ABC das gesuchte.

Beweis. Von C fälle die Perpendikel CL, CM auf EK und FK. Da EKF = R, und KC Halbirungslinie von EKF

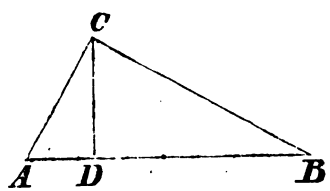
Digitized by Google

ist, so ist LKC = ½ R; aber KLC = R, also auch LCK = ½ R, oder KL = LC; ebenso ist KM = MC; aber KL ∥ CM, und KM ∥ LC; also ist KLCM ein gleichseitiges und rechtwinkliges Parallelogramm, oder ein Quadrat, dessen Diagonale KC ist; also muß die Seite dieses Quadrats = b sein, oder CL = CM = CD. Da nun CLE = CMF = R = CDA = CDB, und LEC = ECA = CAD und ebenso CFM = FCB = CBD ist (weil KE ∥ CA, KF ∥ CB und EF ∥ AB ist), so ist △ CEL ≅ △ CAD und △ CFM ≅ △ CBD, also CE = CA und CF = CB; daher CA + CB = CE + CF = EF = a. Nun ist aber ACB = EKF = R und CD = b; also ist △ ABC das verlangte.

Zusatz. Ganz auf ähnliche Weise läßt sich die allgemeine Aufgabe lösen, ein Dreieck zu konstruiren, von welchem ein Winkel, die Summe der beiden ihn einschließenden Seiten und der zur dritten Seite gehörige Höhenperpendikel gegeben sind. Speziell auf den pythagorischen Lehrsatz gegründet, also nur für das rechtwinklige Dreieck gültig ist dagegen folgende Auflösung, welche in dem vorliegenden Falle zugleich bedeutend einfacher ist.

2. Auflösung.

Analysis. $AC^2+BC^2=AB^2$, also $AC^2+BC^2+2AC.BC=AB^2+2AB.CD$, d. h. $(AC+BC)^2=AB(AB+2CD)$ oder $AB : AC+BC = AC+BC : AB+2CD$; da nun AC + BC mittlere Proportionale zwischen AB und AB + 2CD ist, so ist,

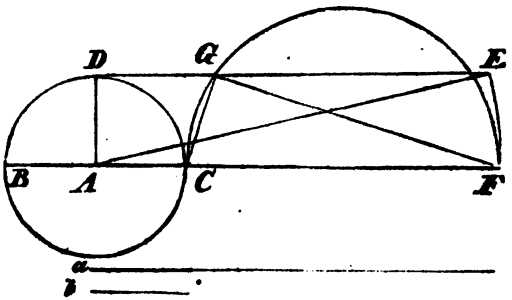


wenn AC + BC als Tangente an einen Kreis gezogen wird, dessen Halbmesser CD ist, AB das äußere Stück der zu dieser Tangente gehörigen Sekante, welche durch den Mittelpunkt geht; also ist AB, folglich △ ABC gegeben.

Konstruktion. Von A als Mittelpunkt beschreibe mit einem Halbmesser = b einen Kreis, ziehe einen beliebigen Durchmesser BC, und den Halbmesser AD senkrecht auf BC,

Digitized by Google

an D ziehe die Tangente DE = a, ziehe AE und beſchreibe von A als Mittelpunkt mit AE als Halbmeſſer einen Kreisbogen, der die Verlängerung von BC in F treffe; über CF als Durchmeſſer beſchreibe einen Halbkreis, der DE in G treffe; endlich ziehe CG und FG, ſo iſt △ CFG das geſuchte.



Beweis. $CG^2 + FG^2 = CF^2$, alſo $CG^2 + FG^2 + 2CG \cdot FG = CF^2 + 2CF \cdot AD$ (weil AD = b die Höhe von △ CFG iſt) $= CF^2 + 2CF \cdot AC = CF^2 + 2CF \cdot AC + AC^2 - AC^2 = (CF + AC)^2 - AC^2 = AF^2 - AC^2 = AE^2 - AD^2 = DE^2 = a^2$, d. h. $(CG + FG)^2 = a^2$; alſo iſt $CG + FG = a$.*)

Determination. Da DA Höhe und CF Hypotenuſe des Dreiecks iſt, ſo muß $DA \leqq \frac{1}{2} CF$, alſo $2DA \leqq CF$ ſein; nun iſt

$(CG + FG)^2 = CF^2 + 2CF \cdot DA$; alſo muß ſein

$(CG + FG)^2 \geqq 4DA^2 + 4DA \cdot DA$.

$\geqq 8DA^2$, oder

$a^2 \geqq 8b^2$; d. h. die Summe der beiden Katheten darf nicht kleiner ſein als die doppelte Diagonale des über der Höhe beſchriebenen Quadrats. Eine ähnliche Determination hätte

*) Der Beweis läßt ſich auch dadurch abändern, daß man von F an den Kreis A eine Tangente FH und hierauf AH zieht, und beweist, daß △ AFH ≅ △ AED, alſo FH = DE iſt, woraus ſich wie oben zunächſt ergibt: $(CG + FG)^2 = CF^2 + 2CF \cdot AC = CF\,(CF + 2AC) = 2CF \cdot BF = FH^2 = DE^2 = a^2$; alſo CG + FG = a.

Digitized by Google

sich aus der ersten Auflösung erhalten lassen, indem sich dort vermittelst der Konstruktion des Dreiecks EFK aus dem gegebenen EF, dem Winkel EKF = R und der Halbirungslinie CK dieses Winkels ableiten ließ, daß unter allen über EF als Hypotenuse beschriebenen rechtwinkligen Dreiecken das gleichschenklige die größtmögliche Halbirungslinie des rechten Winkels habe; da nun diese halb so groß ist als EF, so folgt daraus, daß EF nicht kleiner sein darf als 2CK, d. h. als die doppelte Diagonale des Quadrats der Höhe.

Zusatz. Die obige zweite Konstruktion hätte man auch aus der algebraischen Behandlung unserer Aufgabe (Seite 43) ableiten können, wenn man nicht den dortigen Schlußwerth $z = -b + \sqrt{a^2 + b^2}$, sondern die frühere Gleichung $z^2 + 2bz = a^2$ konstruirt hätte, aus welcher sich ebenfalls $z(z + 2b) = a^2$, oder $z : a = a : z + 2b$ ergibt, was mit der obigen Proportion AB : AC + BC = AC + BC : AB + 2CD identisch ist.

VI. Aufgabe.

Ein gegebener Kreis ist durch einen Durchmesser AB in zwei Halbkreise getheilt, und auf der Peripherie des einen Halbkreises sind zwei Punkte C und D gegeben; auf der Peripherie des andern Halbkreises einen Punkt zu suchen, der die Eigenschaft hat, daß die von ihm nach den gegebenen Punkten C und D gezogenen Chorden den Durchmesser AB in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte E schneiden.*)

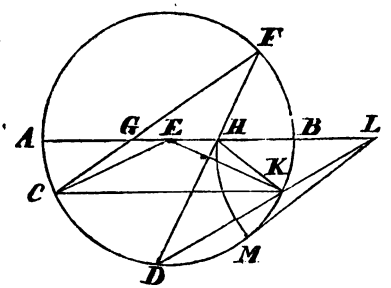
1. Auflösung.

Analysis. Es sei F der gesuchte Punkt, der die Eigenschaft habe, daß FC und FD den Durchmesser AB in G und

*) Diese schwierigere von Diesterweg bearbeitete Aufgabe ist hier zum Schlusse beigefügt worden, um auch an einer solchen Aufgabe zu zeigen, wie verschiedene Hilfslinien einen verschiedenen Gang der Analysis und demgemäß verschiedene Konstruktionen bedingen.

Digitized by Google

H so schneiden, daß EG = EH sei. Durch C ziehe CK ∥ AB, so ist K gegeben; also ist auch DK gegeben, folglich der Punkt L, in welchem DK und AB einander verlängert schneiden; ziehe HK, CE, KE, so ist CE = KE, EG = EH, CEA = KEB (da Bogen AC = Bogen BK ist); also ist △ CEG ≅ △ KEH und daher CGH = KHG, also auch AGC = KHB; aber AGC = GCK = FDK (da beide letzteren Winkel Peripheriewinkel auf dem Bogen GBK sind); folglich ist auch KHB = FDK; nun ist KLH = DLH; also ist △ HKL ∼ △ DHL, und daher KL : HL = HL : DL; also KL . DL = HL²; mithin ist HL gleich der von L an den Kreis gezogenen Tangente; folglich ist HL, also H, und daher auch DH, folglich F gegeben.



Konstruktion. Durch C ziehe CK ∥ AB; ziehe DK und verlängere es, bis es die Verlängerung von AB in L trifft; von L ziehe an den Kreis die Tangente LM, und beschreibe von L als Mittelpunkt mit LM als Halbmesser einen Bogen, der AB in H treffe; ziehe DH und verlängere es, bis es den Kreis in F trifft, so ist F der gesuchte Punkt.

Beweis. Ziehe FC, welches AB in G schneide, EC, EK, HK. Da LM Tangente und LD Sekante des Kreises ist, so ist LM² = LK . LD; also, weil LM = LH ist, auch LH² = LK . LD; folglich ist LK : LH = LH : LD; da nun auch KLH = HLD ist, so ist △ HKL ∼ △ DHL, und daher KHL = KDH = KCF = AGC; also auch KHE = CGE; da nun auch KEH = CEG (als Centriwinkel auf den gleichen Bögen BK und AC) und KE = CE ist, so ist △ KEH ≅ △ CEG, und daher EH = EG.

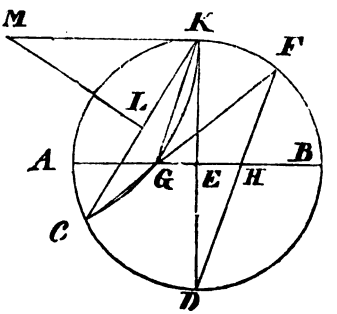
Zusatz. Wenn man auf der Verlängerung von AL über L hinaus von L aus ein Stück = LM abschneidet, und den erhaltenen Punkt mit D verbindet, so erhält man auf ähn-

Digitized by Google

liche Weise auf dem Halbkreise ACDB selbst einen Punkt, der die Eigenschaft hat, daß die von ihm nach C und D gezogenen Chorden gehörig verlängert die Verlängerungen des Durchmessers AB in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte E schneiden.

2. Auflösung.

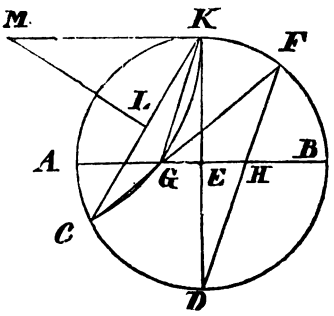
Analysis. Es sei wieder F der gesuchte Punkt, der die Eigenschaft habe, daß die Chorden FC, FD den Durchmesser AB in G und H so schneiden, daß EG = EH sei. Von D ziehe den Durchmesser DK und ziehe GK. Da DE = EK, EH = EG und DEH = KEG ist, so ist △ DEH ≅ △ KEG, und daher EDH = EKG, also DF ∥ KG; folglich auch KGF = CFD. Nun ist D, E, also auch K gegeben; ferner da C und D gegeben ist, so ist auch der auf dem Bogen CD stehende Peripheriewinkel CFD, also auch KGF, folglich auch sein Nebenwinkel KGC gegeben; nun ist CK gegeben, also ist der den Winkel KGC fassende Kreisabschnitt über CK, mithin auch sein Durchschnitt G mit AB und daher auch F gegeben.



Konstruktion. Von D ziehe durch den Mittelpunkt E den Durchmesser DK, und ziehe CK; errichte auf DK in K und auf CK im Halbirungspunkte L Perpendikel, die sich in M schneiden; von M als Mittelpunkt beschreibe mit MK als Halbmesser einen Kreisbogen, der auch durch C gehen wird, weil M von K und C gleich weit entfernt ist; es schneide dieser Kreisbogen AB in G, ziehe CG und verlängere es nach F, so ist F der gesuchte Punkt.

Beweis. Ziehe DF, welches AB in H schneide; ziehe ferner KG; da DK Tangente und CK Chorde des vom Mittel-

Digitized by Google

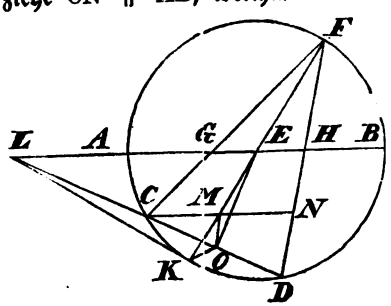


punkte M beschriebenen Kreisbogens ist, so ist der Peripheriewinkel des über CK auf der Seite von M liegenden Kreisabschnitts = CKD, also der Peripheriewinkel des Ergänzungsabschnitts CGK = 2 R — CKD. Daher ist KGF = CKD; aber CKD = CFD als Peripheriewinkel auf dem nemlichen Bogen CD; daher ist auch KGF = CFD, und daher KG ‖ FD, also GKE = EDH; aber auch GEK = DEH und KE = DE; also ist △ GEK ≅ △ HED, und daher EG = EH.

Zusatz. Der von M als Mittelpunkt mit MK als Halbmesser beschriebene Kreis schneidet AB nicht blos in G, sondern es gibt einen 2ten Durchschnitt auf der Verlängerung von AB über A hinaus. Benützt man den letztern und konstruirt im Uebrigen wie oben, so erhält man wieder einen Punkt auf dem Halbkreise ACDB, der die Eigenschaft hat, daß die von ihm nach C und D gezogenen Chorden verlängert die Verlängerungen von AB in zwei Punkten schneiden, die von dem Mittelpunkte E gleichweit entfernt sind.

3. Auflösung.

Analysis. Es sei wieder F der gesuchte Punkt, und daher, wenn FC und FD gezogen sind, EG = EH; von F aus ziehe den Durchmesser FK, verlängere DC nach L, und ziehe CN ‖ AB, welches FK in M schneide. Da CN ‖ GH ist, so ist CM : MN = GE : EH; aber GE = EH, also auch CM = MN; fällt man ferner von E den Perpendikel EO auf CD, so ist auch CO = OD; also ist CM : MN = CO : OD, und daher, wenn MO gezogen wird, MO ‖ ND,



Digitized by Google

also COM = CDF = CKF (wenn CK gezogen wird, da beide letzteren Winkel auf dem Bogen CAF stehen); d. h. COM = CKM, und daher CKOM ein Kreisviereck; folglich ist auch, wenn KO gezogen wird, MKO = MCO = ELO (da CN ‖ LB ist) d. h. EKO = ELO; wenn daher LK gezogen wird, so ist auch ELKO ein Kreisviereck; folglich ist LKE = LOE, aber LOE = R, also auch LKE = R; daher ist LK Tangente. Nun ist C, D, also auch L, folglich K, folglich auch KF, also F gegeben.

Konstruktion. Ziehe CD, und verlängere es, bis es die Verlängerung von AB in L trifft; von L ziehe an den Kreis die Tangente LK und durch K den Durchmesser KF, so ist F der gesuchte Punkt.

Beweis. Ziehe FC, FD, welche AB in G und H schneiden; ziehe ferner CK und CMN ‖ AB; endlich fälle von E auf CD einen Perpendikel EO und ziehe MO, KO. Da LK Tangente, also LKE = R und ebenso LOE = R ist, so ist LKOE ein Kreisviereck, und daher OKE = OLE; aber OLE = OCN; also auch OKE = OCN, d. h. OKM = OCM, und daher auch OKCM ein Kreisviereck; daher ist COM = CKM, aber CKM = CDF, weil beide auf dem Bogen CAF stehen; also auch COM = CDF, und daher OM ‖ DN, folglich CM : MN = CO : OD; aber CO = OD, also auch CM = MN. Nun ist endlich CM : MN = GE : EH, weil CN ‖ GH ist; folglich ist auch GE = EH.

Zusatz 1. Den auf dem Halbkreise ACDB liegenden analogen Punkt erhält man, wenn man von L die zweite Tangente an den Kreis zieht, und im Uebrigen wie oben verfährt.

Zusatz 2. Sämmtliche Konstruktionen werden einfacher, wenn CD ‖ AB ist, indem dann der gesuchte Punkt auf dem Halbkreise AFC, so wie der analoge Punkt auf dem Halbkreise ACDB die beiden Durchschnitte des auf CD im Halbirungspunkte errichteten Perpendikels mit der Kreisperipherie sind.

Digitized by Google

§. 3.

Der Zusammenhang der geometrischen Analysis mit der Konstruktion und dem Beweise.

Wenn die Analysis vollendet ist, so kann die Aufgabe als gelöst betrachtet werden; denn jene zeigt ja, wie aus den ursprünglich gegebenen Punkten nach und nach andere Punkte folgen, die ebenfalls als gegeben erscheinen. Die Konstruktion hat somit der Analysis Schritt für Schritt zu folgen, und die Punkte genau in der Ordnung aus einander abzuleiten, in welcher sie die Analysis als gegeben und aus einander sich ergebend festgestellt hat. Nehmen wir als Beispiel die VI. Aufgabe Seite 79 und zwar die erste Auflösung. Die dortige Analysis zeigte, daß aus den ursprünglich und durch die Aufgabe selbst gegebenen Punkten A, B, C, D, E zunächst K als gegeben abgeleitet werden könne, aus K aber L; durch L bestimme sich H und durch H endlich F. Die Konstruktion bestimmte auch wirklich zunächst K, indem CK ∥ AB gezogen wurde, hierauf L durch Ziehung von DK und Verlängerung bis zum Durchschnitt mit der verlängerten AB, hierauf H dadurch, daß von L die Tangente LM gezogen und LH = LM von LA abgeschnitten wurde; endlich wurde der gesuchte Punkt F bestimmt, indem DH gezogen und bis zum Durchschnitte mit der Kreisperipherie verlängert wurde.

Die Konstruktion hat also der Analysis Schritt für Schritt zu folgen und die Punkte, welche zur Bestimmung der durch die Aufgabe geforderten Figur nöthig sind, ganz in der Ordnung aus einander abzuleiten, in welcher die Analysis sie als aus einander folgend nachgewiesen hat. Die Analysis und die Konstruktion führen daher im Wesentlichen auf die nemliche Figur, nur mit dem Unterschiede, daß die Analysis nicht auf die Größe der gegebenen Stücke Rücksicht nimmt, sondern nur untersucht, wie die gesuchten Stücke mit gegebenen Stücken der nemlichen Art zusammenhängen, während die Konstruktion genau von der gegebenen Größe der gegebenen Stücke ausgehen muß. Die Konstruktion wird dabei übrigens oft Linien

Digitized by Google

ziehen, welche die Analysis nicht nöthig hatte, und zwar in allen den Fällen, wo ein Punkt durch Anwendung einer Hilfsaufgabe bestimmt wird, den die Analysis eben mit Rücksicht auf diese Hilfsaufgabe als bekannt voraussetzte. (Man vergleiche in dieser Hinsicht Analysis und Konstruktion bei der 3ten Auflösung der III. Aufgabe Seite 69.) Dagegen fehlen der aus der Konstruktion sich ergebenden Figur ebenso häufig Linien, welche die Analysis nöthig hatte; es sind dieß diejenigen Linien, welche die Analysis für den Beweis bestimmter Eigenschaften bedarf, durch welche die gesuchten Punkte als gegeben betrachtet werden dürfen. So z. B. in der oben erwähnten Aufgabe VI. Seite 79 wurde durch Ziehung der Linien CE, KE, KH nachgewiesen, daß KHL = LDH sei, woraus sich, weil zugleich KLH = HLD ist, die Aehnlichkeit der Dreiecke HKL und DHL ergab, welche nachgewiesen werden mußte, um schließen zu können, daß HL mittlere Proportionale zwischen KL und DL, also gleich der von L an den Kreis gezogenen Tangente sei. Letztere Eigenschaft aber zu wissen, war nothwendig, um H als gegeben betrachten zu dürfen; daher war für die Konstruktion wohl die Tangente LM nöthig, nicht aber die Linien CE, KE und KH. Diese letztern kommen erst wieder vor als Hilfslinien bei der Führung des Beweises.

Vergleichen wir nun aber den Beweis mit der Analysis, so finden wir, daß der erstere gerade den umgekehrten Gang geht von letzterer. Der Grund davon liegt darin, daß die Analysis von den Eigenschaften der gesuchten Größe ausgeht, um aus ihnen den Zusammenhang mit den gegebenen Größen abzuleiten, während bei dem Beweise von den gegebenen Größen ausgegangen wird, und die Nachweisung, daß die gesuchten und durch die Konstruktion gefundenen Größen wirklich die verlangten Eigenschaften haben, der Endzweck und das Schlußresultat des ganzen Beweises ist. Was daher bei der Analysis als Erstes erscheint, ist bei dem Beweise das Letzte, und diesem Verhältnisse entsprechend kehren sich daher alle Folgerungen vollständig um, so daß in vielen Fällen der Beweis gleichsam die von hinten herein gelesene Analysis ist. So z. B. in dem angeführten Beispiele Seite 80 geht die Analysis aus von der

Digitized by Google

Gleichheit von EG und EH, schließt daraus auf die Kongruenz der Dreiecke ECG und EHK, aus diesen auf die Gleichheit der Winkel HDL und KHL, daraus auf die Aehnlichkeit der Dreiecke HDL und KHL, und aus dieser Aehnlichkeit leitet sie die stetige Proportion ab: KL : HL = HL : DL, woraus endlich das Schlußresultat sich ergibt, daß LH gleich der von L an den Kreis gezogenen Tangente sein müsse. Genau das Umgekehrte ist der Gang des Beweises. Letzterer geht nemlich davon aus, daß LH = LM sei, leitet daraus die Proportion ab: KL : HL = HL : DL, schließt daraus auf die Aehnlichkeit der Dreiecke HDL und KHL, leitet daraus die Gleichheit der Winkel HDL und KHL ab, kommt dadurch auf die Kongruenz der Dreiecke ECG und EKH, und schließt daraus endlich auf die Gleichheit von EG und EH. Aehnliche Nachweisungen lassen sich für die übrigen Analysen und Beweise des vorigen Paragraphen geben.

Da nach der vorstehenden Entwicklung die Schlüsse für den Beweis in der umgekehrten Ordnung folgen von der, in welcher die Schlüsse der Analysis aus einander hervorgehen, so ergibt sich mit Nothwendigkeit, daß in vielen Fällen die Lehrsätze, auf welche sich der Beweis gründet, die Conversen sein werden von denen, welche die Analysis bedurfte.

In dem voranstehenden Beispiele wurde z. B. bei der Analysis aus der Proportion KL : HL = HL : DL geschlossen, daß HL gleich der von L an den Kreis gezogenen Tangente sein werde, bei dem Beweise aber umgekehrt daraus, daß HL gleich der Tangente gemacht wurde, die Proportion KL : HL = HL : DL abgeleitet. Im ersten Schlusse wurde also der allgemeine Satz angewendet: wenn eine gerade Linie die mittlere Proportionale ist zwischen der ganzen von einem Punkte außerhalb des Kreises durch denselben gezogenen Sekante und dem außerhalb des Kreises liegenden Stücke derselben, so ist sie gleich der von dem nemlichen Punkte an den Kreis gezogenen Tangente; dem zweiten Schlusse aber liegt der umgekehrte Satz zu Grunde: wenn eine gerade Linie gleich der von einem Punkte außerhalb eines Kreises an denselben gezogenen Tangente ist, so ist sie die

Digitized by Google

mittlere Proportionale zwiſchen irgend einer von dieſem Punkte durch den Kreis gezogenen Sekante und dem außerhalb des Kreiſes liegenden Stücke derſelben.

Damit hängt zuſammen, daß, wenn es ſich um Beweiſe der Aehnlichkeit oder Kongruenz von Dreiecken handelt, für die Analyſis gewöhnlich ein anderer Satz angewendet wird, als für den darauf folgenden Beweis. Es muß dabei aufmerkſam gemacht werden, daß die verſchiedenen Kongruenz- oder Aehnlichkeitsſätze als Converſen von einander dargeſtellt werden können. Nehmen wir z. B. die beiden Sätze: zwei Dreiecke ſind kongruent, wenn eine Seite und zwei gleichliegende Winkel gleich ſind, und: zwei Dreiecke ſind kongruent, wenn in beiden zwei Seiten und der eingeſchloſſene Winkel gleich ſind, ſo iſt im erſten der Satz enthalten: wenn in zwei Dreiecken eine Seite und zwei gleichliegende Winkel gleich ſind, ſo ſind auch zwei Seiten und der von ihnen eingeſchloſſene Winkel in beiden gleich, im zweiten aber der umgekehrte Satz: wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeſchloſſene Winkel gleich ſind, ſo ſind auch eine Seite und zwei gleichliegende Winkel in beiden gleich. Gleiches gilt für die Aehnlichkeitsſätze. Wir können dieß ſogleich an dem angeführten Beiſpiele nachweiſen. Seite 80 wurde in der Analyſis aus der Vorausſetzung, daß EG = EH ſei, unter der weiteren Nachweiſung, daß auch EC = EK, und CEG = KEH ſei, die Kongruenz von △ CEG und △ KEH bewieſen, und daraus geſchloſſen, daß auch CGE = KHE ſein müſſe: es wurde alſo der zweite von den ſo eben erwähnten Kongruenzſätzen angewendet. Bei dem ſpäter folgenden Beweiſe dagegen mußte aus der Kongruenz erſt geſchloſſen werden, daß EG = EH ſei; alſo konnte dieſe Bedingung nicht für die Kongruenz ſelber verwendet werden; dagegen konnte gerade das vorher aus der Kongruenz Abgeleitete, nemlich die Gleichheit von CGE und KHE vorausgeſetzt werden, während die beiden andern Bedingungen, daß EC = EK, und CEG = KEH ſei, dieſelben blieben, und ſo folgte daher die Kongruenz vermittelſt des erſten der oben erwähnten Kongruenzſätze. Ebenſo wurde in der Analyſis die Aehnlichkeit der Dreiecke HKL und DHL aus der Gleichheit zweier Winkel geſchloſſen,

Digitized by Google

nemlich daraus, daß HLK = DLH, und KHL = HDL sei, aus dieser Aehnlichkeit aber wurde die Proportion KL : HL = HL : DL abgeleitet; umgekehrt wurde im folgenden Beweise die Aehnlichkeit der nemlichen Dreiecke aus der Proportion KL : HL = HL : DL und der Gleichheit der Winkel HLK und DLH geschlossen, also der Satz angewendet: zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in beiden ein Winkel gleich und die ihn einschließenden Seiten proportionirt sind; aus der Aehnlichkeit aber wurde erst die Gleichheit der Winkel KHL und HDL gefolgert.

Wenn daher auch die Analysis in der strengsten Form geführt wird, so kann doch möglicherweise bei der Führung des Beweises eine Verlegenheit entstehen, wenn man dabei genau den umgekehrten Gang einhalten will; dieser Fall tritt dann ein, wenn für den Beweis eine Converse erforderlich wäre, welche nicht so allgemein wahr ist wie der vorangegangene Satz selbst, ein Umstand, der nicht selten vorkommen wird, da die ebene Geometrie eine Menge Sätze enthält, die sich nicht allgemein convertiren lassen. Ein derartiger Fall kam vor im vorangegangenen Paragraphen bei der 3ten und 4ten Auflösung der II. Aufgabe, Seite 61, 62. Die Analysis schloß z. B. aus der Aehnlichkeit von △ ACD und AEB, daß, weil AB = 2AD sei, auch AE = 2AC und EB = 2CD sein müsse. Der Beweis hätte umgekehrt daraus, daß AE = 2AC und EB = 2CD gemacht wurde, schließen sollen: wenn der gegebene Punkt C mit dem gefundenen Punkte D verbunden werde, so sei CD ∥ EB, also AB = 2AD. Dieser Schluß wäre möglich, wenn der in der Analysis angewendete Satz: wenn AB in D halbirt und durch D eine Parallele mit EB gezogen ist, so ist dadurch auch AE in C halbirt, und die Parallele CD ist die Hälfte von EB, sich auf folgende Art umkehren ließe: wenn AE in C halbirt ist, und von C eine gerade Linie CD nach AB so gezogen wird, daß CD die Hälfte von EB ist, so ist CD ∥ EB, und daher AB in D halbirt. Diese Umkehrung ist aber deßwegen nicht möglich, weil, wenn von C mit einem Halbmesser = $^1/_2$EB ein Bogen beschrieben wird, welcher AB schneidet, im Allgemeinen zwei Schneidungspunkte sich finden werden, also von C nach AB zwei gerade Linien = $^1/_2$EB ge-

Digitized by Google

zogen werden können, von denen mithin nur eine parallel mit EB sein kann; wie ja namentlich im vorliegenden Falle CB die zweite derartige Linie wäre. Es mußte daher der Beweis hier anders gewendet werden, indem durch C eine Parallele mit EB gezogen wurde, welche AB in D traf, und nun bewiesen wurde, daß CD = $^1/_2$EB sein müsse, also gleich dem Halbmesser des Kreises, daß daher der Punkt D auf der Peripherie des Kreises liege. Aehnliches gilt für die 4te Auflösung.

Digitized by Google

Drittes Buch.

Die verschiedenen Hauptwege, um zur Auflösung geometrischer Aufgaben zu gelangen.

§. 1.

Allgemeine Bemerkungen über diese Wege.

Jede Aufgabe ist zwar, wenn man sie nur vom Standpunkte der reinen Geometrie betrachtet, eine individuelle, und erfordert eine selbstständige Analysis; ferner gibt es, wie der zweite Paragraph des vorigen Buches gezeigt hat, eine große Zahl von Aufgaben, welche je nach der Beschaffenheit der gezogenen Hilfslinien die verschiedensten Auflösungen zulassen; aber demungeachtet gibt es einige Hauptgesichtspunkte, welche bei der Auflösung von Aufgaben besonders herauszuheben sind, und einige Hauptwege, auf welche sich die verschiedenen Methoden der Auflösungen zurückführen lassen, und bald ist es nur einer dieser Wege, bald eine Combination von mehreren derselben, durch welche man zur Lösung einer Aufgabe gelangt.

Alle Auflösungen von Aufgaben können nemlich gefunden werden entweder durch ihren Zusammenhang mit schon aufgelösten Aufgaben, oder durch ihren Zusammenhang mit geometrischen Wahrheiten. Im ersten Falle ist es entweder die Aehnlichkeit der Aufgabe mit einer schon gelösten, oder die Abhängigkeit derselben von einer schon gelösten, was zur Auflösung

Digitized by Google

der neuen Aufgabe führt. Im letzten Falle gibt es drei verschiedene Arten von geometrischen Wahrheiten, auf welche die Lösungen der Aufgaben gegründet sind. Somit erhalten wir fünf Hauptwege, um durch Analysis die Auflösung einer Aufgabe finden zu können, welche im Folgenden näher betrachtet werden sollen, nemlich

1) die Auflösung durch Analogie.
2) „ „ „ Reduktion.
3) „ „ „ Lehrsätze.
4) „ „ „ Data.
5) „ „ „ geometrische Oerter.

---

§. 2.

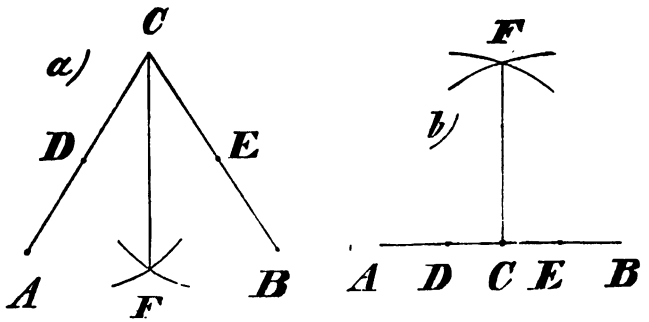
Die Auflösung der Aufgaben durch Analogie.

Die Analogie, d. h. die Aehnlichkeit einer Aufgabe mit einer schon gelösten in den Bedingungen ist ein sehr zu beachtendes Mittel, um bei der Analysis zum Auffinden der Auflösung geführt zu werden. Aus dem innigen Zusammenhange, in welchem bei allen Dingen Grund und Folge, Ursache und Wirkung, also namentlich bei einer Aufgabe die gegebenen Bedingungen und die zu konstruirenden Stücke stehen, ergibt sich leicht, daß, wenn bei zwei Aufgaben die Bedingungen sowohl als die zu suchenden Größen einander ähnlich sind, auch die Wege, auf welchen die letztern aus den erstern abgeleitet werden müssen, also die Konstruktionen einander ähnlich sein werden. Wenn also von zwei derartigen Aufgaben die eine schon gelöst ist, so ist in der Regel dadurch auch für die Analysis der zweiten Aufgabe der Weg vorgezeichnet, und es handelt sich nur darum, die Abänderungen aufzufinden, welche durch die Abweichung der Bedingungen in der zweiten Aufgabe von denen in der ersten gefordert werden. Ja man wird sogar auch zu dem umgekehrten Schlusse berechtigt sein, daß, wenn zwei Konstruktionen wesentliche Aehnlichkeit mit einander haben, auch

Digitized by Google

die Aufgaben selbst einander analog sein werden, wenn auch in dem Wortlaute der Aufgaben keine Analogie zu erkennen sein sollte.

Um für das Letztere zuerst ein Beispiel anzuführen, nehmen wir aus dem elementarsten Theil der ebenen Geometrie die beiden Aufgaben: a) einen gegebenen Winkel ACB zu halbiren, und b) auf einer geraden Linie AB in einem gegebenen Punkte C einen Perpendikel zu errichten. Beide Aufgaben können einander so analog gelöst werden, daß die folgende Konstruktion wortgetreu auf beide paßt: Von CA und CB schneide



zwei beliebige aber einander gleiche Stücke CD und CE ab, und beschreibe von D und E als Mittelpunkten mit beliebigen aber gleichen und hinlänglich großen Halbmessern Kreisbögen, die sich in F schneiden, ziehe endlich CF, so ist in a) durch CF der Winkel ACB halbirt, in b) aber steht CF auf AB in C senkrecht. Aus der vollkommenen Uebereinstimmung der Auflösungen für beide Aufgaben muß geschlossen werden, daß die Aufgaben selbst auch weit übereinstimmender mit einander sein werden, als sich aus dem Ausdrucke beider unmittelbar erkennen läßt; und in der That ist auch die Aufgabe b) nichts anderes als ein spezieller Fall der Aufgabe a). Wenn nemlich AC und BC mit einander eine gerade Linie bilden, so können sie als Schenkel eines Winkels von 180° betrachtet werden, und wenn daher in b) verlangt wird, es soll auf AB in C ein Perpendikel errichtet, d. h. an AC in C ein Winkel von $90° = \frac{180°}{2}$

Digitized by Google

angelegt werden, so ist dieß identisch mit der Forderung, den Winkel ACB, dessen Größe = 180° ist, zu halbiren.

Eine Analysis mit Hilfe der Analogie ist besonders in zwei Fällen anwendbar, nemlich entweder wenn vom Besondern auf das Allgemeine übergegangen wird, oder wenn irgend eine Bedingung in ihr Gegentheil sich verwandelt.

Betrachten wir zunächst den ersten dieser beiden Fälle genauer, so wird jede Auflösung, welche für die allgemeine Aufgabe gilt, auch auf die besondere anwendbar sein, z. B. jede Auflösung einer Aufgabe über das Dreieck überhaupt gilt auch für die besondere Aufgabe über das rechtwinklige Dreieck; außerdem aber kann die besondere Aufgabe Auflösungen zulassen, welche so sehr von der besondern Bedingung abhängig sind, daß sie nicht verallgemeinert werden können. Wenn nun, wie dieß sehr häufig geschieht, die besondere Aufgabe wegen ihrer leichteren Behandlung von dem Schüler früher gelöst wurde, so wird es ihm nicht schwer werden, diejenige Auflösung, welche eine Verallgemeinerung zuläßt, auch wirklich zu verallgemeinern, während er bald bei der zweiten Klasse von Auflösungen, welche aus der besonderen Bedingung hervorgegangen sind, die Unmöglichkeit der Verallgemeinerung erkennen wird, wiewohl auch hier nicht selten eine analoge Analysis sich auffinden lassen wird; in letzterem Falle hat oft die vorangegangene Auflösung der besonderen Aufgabe den Vortheil, auf einen Weg für die Analysis hinzudeuten, den man sonst vielleicht einzuschlagen nicht versucht gewesen wäre.

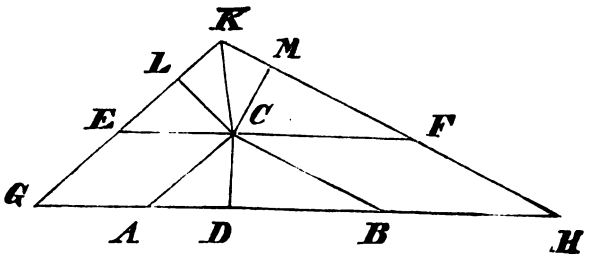
Es sind z. B. im zweiten Buche §. 2 unter Anderem die beiden Aufgaben gelöst worden: ein Dreieck zu beschreiben, von welchem eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Summe der beiden andern Seiten gegeben sind; und: ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Hypotenuse und die Summe beider Katheten gegeben sind. Dort wurden zuerst für die erste Aufgabe drei Auflösungen gegeben, worauf bei der darauffolgenden zweiten Aufgabe bemerkt wurde, daß diese drei Auflösungen sich auch auf sie anwenden lassen, daß sich aber unter Beiziehung des pythagorischen Lehrsatzes noch

Digitized by Google

besondere Analysen bilden lassen, die sich speziell auf die Bedingung gründen, daß der gegebene Winkel ein rechter werden soll. Dadurch erhielten wir für die besondere Aufgabe noch zwei weitere Auflösungen.

Wäre die Anordnung die umgekehrte gewesen, wie dieß in vielen Aufgabensammlungen geschieht, so hätten wir sogleich bemerken können, daß sich von den fünf Auflösungen der zweiten Aufgabe unmittelbar die drei ersten auch auf die allgemeinere Aufgabe anwenden lassen, die zwei letzten aber nicht.

Betrachten wir in dieser Richtung die folgende Aufgabe: ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Summe beider Katheten und der von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel gegeben sind, so würde die verallgemeinerte Aufgabe heißen: ein Dreieck zu konstruiren, von welchem die Summe zweier Seiten, der eingeschlossene Winkel und der zur dritten Seite gehörige Höhenperpendikel gegeben sind. Für die besondere Aufgabe wurden Seite 75 zwei Auflösungen gefunden, und es erhellt bei der ersten leicht, daß sie verallgemeinert werden kann. Und in der That, wenn wir ganz die nemliche Analysis machen, wie Seite 75 (weßwegen auch die entsprechenden Punkte mit den nemlichen Buchstaben bezeichnet

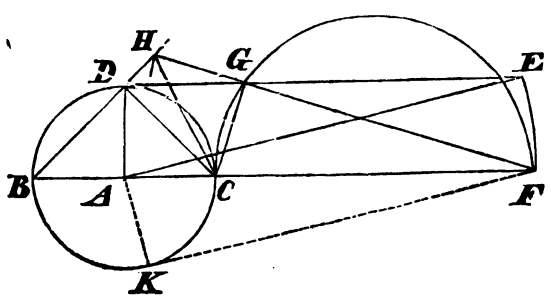


wurden), so zeigt sich, wenn AC + BC, ACB und CD als gegeben betrachtet werden, daß EF und EKF gegeben sind, daß ferner auch hier wie Seite 75 CE = CA, CLE = CDA = R, und CEL = ECA = CAD, und daher △ CEL ≅ △ CAD und aus gleichen Gründen △ CFM ≅ △ CBD, also auch

Digitized by Google

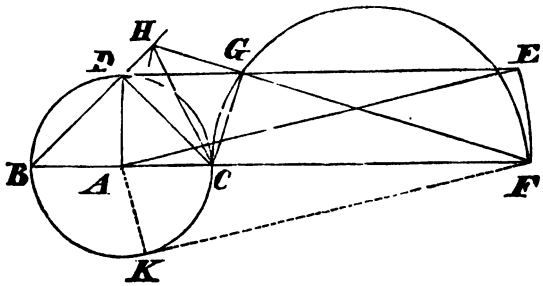
CL = CM = CD ist; da nun CK = CK und CLK = CMK = R ist, so ist △CKL ≅ △CKM, also CKL = CKM, oder EKF durch CK halbirt; auch ist die Größe von CK gegeben, da das rechtwinklige Dreieck CKL aus CL = CD und CKL = $^1/_2$EKF = $^1/_2$ACB konstruirt werden kann. Man kann also auch hier zunächst △ EFK nach Seite 46 konstruiren, da von demselben eine Seite EF = AC + BC, der gegenüberliegende Winkel EKF = ACB, und die Halbirungslinie dieses Winkels CK (gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem eine Kathete = CD und der gegenüberliegende Winkel = $^1/_2$ACB ist) gegeben sind. Ist dieses Dreieck konstruirt, so errichtet man wieder auf EF in C einen Perpendikel CD gleich dem gegebenen, zieht durch D eine Parallele mit EF und durch C Parallelen mit KE und KF, welche die erstere Parallele in A und B schneiden, so ist △ ABC das gesuchte, wie sich ganz analog mit dem Seite 76 geführten Beweise auch hier beweisen läßt.

Die zweite, Seite 77, 78 gegebene Auflösung der besondern Aufgabe ist speziell auf die unter dem Namen des pythagorischen Lehrsatzes bekannte Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks gegründet, und es ergibt sich daraus, daß durch ähnliche Schlüsse, wie dort, keine Lösung der allgemeineren Aufgabe gefunden werden kann. Damit ist aber die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, doch noch eine ähnliche Konstruktion zu finden, wenn wir zwar die Linienkombination beizubehalten, aber dieselbe von ihren Beziehungen zum pythagorischen Lehrsatze loszutrennen im Stande sind. Zu diesem Behufe gehen wir in Betreff der besondern Aufgabe von der bei der zweiten Konstruktion erhaltenen



Figur aus, verlängern aber in △ CFG die Kathete FG so nach H, daß GH = GC wird, und ziehen CH; zieht man nun

Digitized by Google



zugleich BD, CD, DH, so erhellt leicht, daß CHG = HCG = $^1/_2$R ist, weil CGH = R ist; nun ist aber DE || BF, und BCD = $^1/_2$R, weil △ BCD gleichschenklig und rechtwinklig ist; mithin ist auch CDG = BCD = $^1/_2$R, also ist CDG = CHG, und daher ist CDHG ein Kreisviereck; folglich ist HDG = HCG = $^1/_2$R, und daher CDH = R; folglich, da auch BDC = R ist, bilden BD und DH eine gerade Linie, oder H liegt auf der Verlängerung von BD.

Betrachten wir nun diese Folgerungen aus der frühern Konstruktion genauer, so ergibt sich vorerst, weil H auf der Verlängerung von BD liegen muß, aus der Größe von FH, daß H als gegeben betrachtet werden kann. Wir erhalten dadurch zunächst eine Abänderung der Konstruktion der besondern Aufgabe, die gewissermaßen als eine dritte Konstruktion betrachtet werden kann. Nachdem nemlich der Punkt F, wie Seite 78, bestimmt worden ist, wird nicht über CF ein Halbkreis beschrieben, bis er DE in G trifft, sondern statt desselben von F als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = DE (also = a) ein Kreisbogen beschrieben, bis derselbe die Verlängerung von BD in H trifft; zieht man hierauf FH, welches DE in G schneidet, und CG, so ist △ CFG das gesuchte.

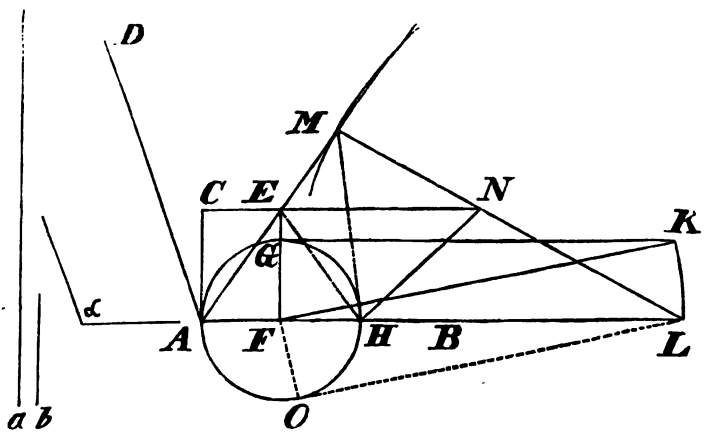
Der Beweis wird jetzt auf folgende Art zu führen sein: Von F ziehe an den Kreis die Tangente FK und an K den Halbmesser AK; da AF = AE, AK = AD und AKF = ADE = R ist, so ist △ AFK ≅ △ AED; also FK = DE; aber auch FH = DE; also FH = FK; nun ist FK^2 = FC . FB, also auch FH^2 = FC . FB, oder FC : FH = FH : FB, und daher, weil CFH = HFB ist, △ FCH ∾ △ BFH, also CHF = FBH; aber △ BCD gleichschenklig und recht-

Digitized by Google

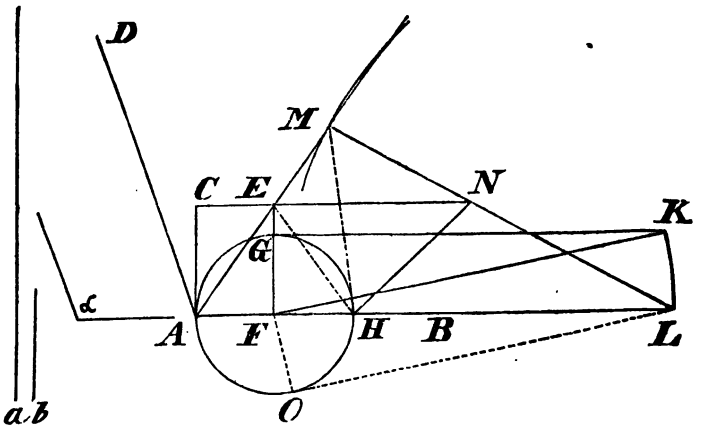
winklig, mithin FBH = $^1/_2$R; folglich ist auch CHF = $^1/_2$R; nun ist CDG = BCD = $^1/_2$R, weil DE ‖ BF ist; daher ist CHG = CDG und daher CDHG ein Kreisviereck; folglich ist HCG = HDG = $^1/_2$R und daher CHG = HCG, also CG = HG und daher CG + FG = HG + FG = FH = a; ferner ist CGF = HCG + CHG = R; endlich ist die Höhe von △ CFG = DA = b.

Vergleichen wir nun damit die allgemeine Aufgabe: ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben sind ein Winkel = α, die Summe der einschließenden Seiten = a und die zur dritten Seite gehörige Höhe = b; so ergibt sich leicht, daß alles bleiben kann, wie bei der besondern Aufgabe, nur daß CGF nicht = R, sondern = α, also CHF nicht = $^1/_2$R, sondern = $^1/_2\alpha$, mithin auch FBH nicht = $^1/_2$R, sondern = $^1/_2\alpha$ werden muß; daher wird BCD zwar ein gleichschenkliges Dreieck werden, aber kein rechtwinkliges, sondern ein solches gleichschenkliges Dreieck, von welchem die Höhe = b und ein Winkel an der Grundlinie = $^1/_2\alpha$ gegeben sind.

Wir erhalten nun durch diese auf die Analogie sich gründenden Schlüsse folgende zweite Konstruktion unserer allgemeinen Aufgabe: auf einer geraden Linie AB errichte in A einen Perpendikel AC = b, lege an AB in A einen Winkel BAD = α und halbire denselben, durch C ziehe eine Parallele mit AB,



Digitized by Google



bis sie die Halbirungslinie des Winkels in E trifft, und fälle von E auf AB den Perpendikel EF; von F als Mittelpunkt beschreibe mit FA als Halbmesser einen Kreis, welcher EF oder dessen Verlängerung in G und AB in H schneide, in G ziehe an den Kreis eine Tangente GK = a, und ziehe FK; von F als Mittelpunkt beschreibe mit FK als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Verlängerung von AH in L schneide, von L als Mittelpunkt ebenso mit einem Halbmesser = a einen Kreisbogen, der die Verlängerung von AE in M schneide, ziehe LM, welches die Verlängerung von CE in N schneide, und ziehe HN, so ist HLN das gesuchte Dreieck.

Beweis. Ziehe HM, EH, von L an den Kreis die Tangente LO und FO; da FL = FK, FO = FG und FOL = FGK = R ist, so ist △ FOL ≅ △ FGK, folglich LO = GK = a; aber auch LM = a, also LO = LM; nun ist $LO^2 = LH \cdot LA$, also ist auch $LM^2 = LH \cdot LA$; und daher LH : LM = LM : LA. Da nun auch HLM = MLA ist, so ist △ HLM ∽ △ MLA, und daher HML = MAL = $\frac{1}{2}\alpha$; da nun auch HEN = EHA = $\frac{1}{2}\alpha$ ist (weil △ EAH gleichschenklig ist), so ist HMN = HEN, folglich HEMN ein Kreisviereck, und daher auch MHN = MEN = MAL = $\frac{1}{2}\alpha$; daher ist HMN = MHN, also HN = MN, und daher HN + LN = MN + LN = LM = a; ferner ist HNL =

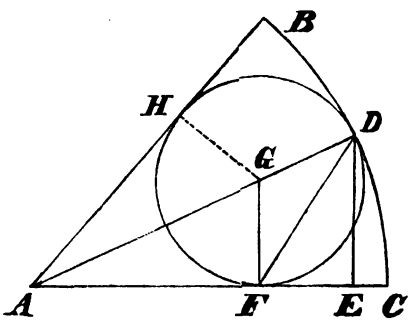
Digitized by Google

HMN + MHN = α; endlich ist der von N auf HL gefällte Perpendikel = EF = b.

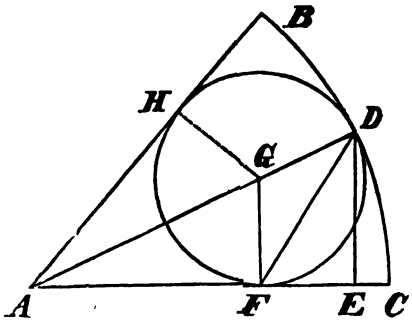
Statt der obigen Konstruktion hätte man auch folgende machen können: nachdem wie oben der Punkt L bestimmt worden, beschreibe man über HL einen Kreisabschnitt, der den Winkel L faßt, und ziehe an den Durchschnitt N dieses Abschnitts mit der durch E gehenden Parallele die Linien HN, LN, so ist $\triangle$ HNL das gesuchte. Der oben gegebene Beweis müßte natürlich entsprechend abgeändert werden.

Der vorliegende zu diesem Zweck ausführlicher dargelegte Ideengang zeigt, wie selbst spezielle Auflösungen, die sich ganz auf besondere Eigenschaften der besondern Arten von Figuren, welche verlangt werden, gründen, oft so sich wenden lassen, daß sich nach den gegebenen Mustern durch Analogieschlüsse Auflösungen für allgemeine Aufgaben ergeben.

Belehrend für den Schüler möge ferner der Versuch sein nach der ersten in §. 2 des zweiten Buches Seite 49 gelösten und in die meisten Beispielsammlungen aufgenommenen Aufgabe, in einen gegebenen Quadranten einen Kreis zu beschreiben, durch Analogie die allgemeinere, aber seltener in den Aufgabensammlungen sich findende Aufgabe zu lösen, in einen gegebenen Kreisabschnitt einen Kreis zu beschreiben, und dabei ganz dem dortigen Gange zu folgen; er wird bald erkennen, welche der dort gegebenen Auflösungen allgemein gültig sind, und welche speziell auf die Voraussetzung sich gründen, daß der Winkel des Kreisausschnitts 90° sei. So läßt sich z. B. die erste Auflösung wortgetreu verallgemeinern, wie folgende Fassung der Konstruktion zeigt, verglichen mit dem Seite 49 gegebenen Texte. Es sei BAC der gegebene Kreisausschnitt, halbire BAC durch AD, welches den Bogen des Ausschnittes in D treffe, von D fälle auf AC den Perpendikel DE und halbire den Win-



Digitized by Google



kel ADE durch DF, welches AC in F treffe; auf AC errichte in F einen Perpendikel, welcher AD in G treffe, und beschreibe von G als Mittelpunkt mit GD als Halbmesser einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

Beweis. Da GD Halbmesser des gefundenen Kreises und AD Halbmesser des gegebenen Kreisbogens, also die Entfernung beider Mittelpunkte gleich der Differenz der Halbmesser ist, so berühren sich beide Kreise von Innen; ferner ist GF ‖ DE, weil beide senkrecht auf AC stehen, also GFD = FDE; aber auch GDF = FDE, also ist GFD = GDF, und daher GF = GD; der gefundene Kreis geht also durch F, und da AFG = R ist, so ist AC Tangente des Kreises; da endlich BAC durch AG halbirt ist, so ist der von G auf AB gefällte Perpendikel GH = GF; also geht der gefundene Kreis auch durch H, und AB ist ebenfalls Tangente an denselben.

Den äußern Berührungskreis wird man auch hier analog wie dort erhalten, wenn man nicht den Winkel ADE, sondern seinen Nebenwinkel halbirt, und im Uebrigen wie oben verfährt.

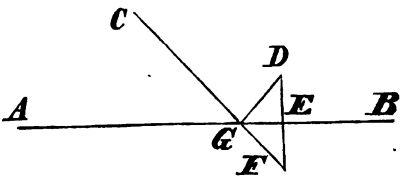
Die Analogieschlüsse vom Besondern auf das Allgemeine sind ferner in vielen Fällen anwendbar, wo in der besondern Aufgabe von einer Theilung in bestimmte gleiche Theile, in der allgemeinen aber von einer Theilung nach gegebenem Verhältnisse die Rede ist. Der Schüler versuche z. B. nach der obigen 2ten Aufgabe Seite 58 die allgemeinere Aufgabe zu lösen: von einem gegebenen Punkte außerhalb eines gegebenen Kreises durch denselben eine Sekante so zu ziehen, daß das außerhalb des Kreises liegende Stück derselben zu dem in den Kreis fallenden ein gegebenes Verhältniß habe (d. h. sich wie

Digitized by Google

zwei gegebene gerade Linien verhalte). Auch hier können sämmtliche gegebene Auflösungen in dieser Richtung einer näheren Betrachtung unterworfen werden.

Die Analogieschlüsse finden endlich in der genannten Beziehung noch in Fällen ihre Anwendung, wo die Analogie eine versteckte ist. Dieß ist z. B. der Fall, wenn bei Aufgaben statt der Bedingung gegebener Punkte, nach welchen Linien mit bestimmten Eigenschaften zu ziehen sind, die Bedingung von Kreisen gegeben wird, nach welchen Tangenten mit ähnlichen Eigenschaften gezogen werden sollen. Da nemlich jeder Punkt als ein Kreis betrachtet werden kann, dessen Halbmesser gleich Null ist, so ist in der ersten Bedingung ein besonderer Fall der zweiten allgemeineren versteckt. In der Regel sind Aufgaben, welche die erstere Klasse von Bedingungen enthalten, leichter zu lösen, als Aufgaben mit den letztern; ist daher die leichtere Aufgabe gelöst, so ist die Lösung der schwierigeren häufig durch Analogieschlüsse zu finden.

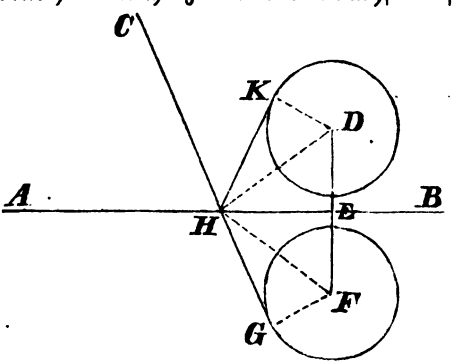
Ein Beispiel soll dieß anschaulich machen. Fast in jeder vollständigeren Sammlung von Aufgaben findet sich die Aufgabe: eine gerade Linie AB und zwei Punkte C und D auf einer Seite derselben sind gegeben; auf AB soll ein Punkt gefunden werden, welcher die Eigenschaft hat, daß zwei von ihm nach C und D gezogene gerade Linien mit AB gleiche Winkel machen.



Ihre Lösung geschieht bekanntlich dadurch, daß von D auf AB ein Perpendikel DE gefällt und nach F so verlängert wird, daß EF = DE ist, und daß hierauf CF gezogen wird, durch dessen Durchschnitt mit AB in G der gesuchte Punkt bestimmt ist; denn zieht man DG, so ist $\triangle$ DEG $\cong$ $\triangle$ FEG, weil DE = FE, EG = EG und DEG = FEG = R ist; folglich ist DGE = FGE; aber FGE = CGA (als Scheitelwinkel); folglich ist DGB = CGA.

Digitized by Google

Es sei nun die Aufgabe zu lösen: eine gerade Linie AB und auf einer Seite derselben ein Punkt C und ein Kreis mit dem Mittelpunkte D sind gegeben; auf AB soll ein Punkt gefunden werden, welcher die Eigenschaft hat, daß eine von ihm nach C gezogene gerade Linie und eine von ihm nach dem gegebenen Kreise gezogene Tangente mit AB gleiche Winkel machen. Betrachten wir das Wesentliche an der Analysis zur Auflösung der vorigen Aufgabe, so besteht es darin, daß gleichsam der Punkt D um AB als Axe nach der entgegengesetzten Seite von AB gedreht wird, wodurch △ DGE in die Lage von △ FEG und der Winkel DEG in die Lage von FGE kommt, so daß FGE und AGC Scheitelwinkel werden, also CF eine gerade Linie wird. Zur Lösung der neuen Aufgabe werden wir daher auf gleiche Weise verfahren können, wodurch die leicht zu bildende Analysis auf folgende analoge Konstruktion führt: Von D fälle auf AB einen Perpendikel DE, verlängere ihn so nach F, daß EF = DE wird, und beschreibe von F als Mittelpunkt mit einem Halbmesser gleich dem des gegebenen Kreises einen Kreis; ziehe an diesen Kreis von C eine Tangente CG, welche AB in H schneide, so ist H der gesuchte Punkt.



Beweis. Von H ziehe an den gegebenen Kreis die Tangente HK, ziehe ferner HD, DK, HF, FG. Da DE = EF, HE = HE, und DEH = FEH = R ist, so ist △ DEH ≅ △ FEH, also DHE = FHE, und DH = FH; da nun auch DK = FG, und DKH = FGH = R ist, so ist auch △ DHK ≅ △ FHG, und daher auch DHK = FHG; folglich ist DHE + DHK = FHE + FHG, d. h. KHE =

Digitized by Google

GHE; aber GHE = CHA (als Scheitelwinkel); folglich ist auch KHE = CHA.*)

Es erhellt leicht, daß, weil von C an den Kreis F zwei Tangenten gezogen werden können, auch auf AB zwei Punkte liegen, welche die verlangte Eigenschaft haben.

Wäre die noch allgemeinere Aufgabe zu lösen: Eine gerade Linie AB und auf einer Seite derselben zwei Kreise sind gegeben; es soll auf AB ein Punkt gefunden werden, der die Eigenschaft hat, daß die beiden von ihm nach den zwei Kreisen gezogenen Tangenten mit AB gleiche Winkel machen, so erhellt nach dem ähnlichen Herumschlagen des einen Kreises auf die entgegengesetzte Seite von AB, daß diese Aufgabe auf die bekannte Aufgabe zurückgeführt werden kann, an zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen. Auch ergibt sich, daß auf AB im Allgemeinen vier Punkte gefunden werden können, welche die verlangte Eigenschaft haben, weil an zwei Kreise vier gemeinschaftliche Tangenten möglich sind, die sich nur in besonderen Fällen auf drei oder noch weniger reduziren.

Eine noch weitere Verallgemeinerung wäre, wenn in den voranstehenden beiden Aufgaben statt Tangente gesagt wäre: Sekante mit einer Chorde von gegebener Größe.

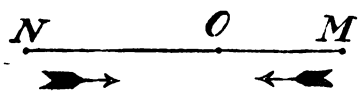
Der zweite Hauptfall ist die Analogie der Gegensätze; nach diesem sind daher Analogieschlüsse für die Analysis in allen Fällen anwendbar, in welchen die sämmtlichen Bedingungen der Aufgabe bis auf eine unverändert bleiben, diese eine aber in ihr Gegentheil übergeht. Letzteres geschieht entweder, wenn die Lage eine entgegengesetzte wird, oder wenn die Größe sich in das Gegentheil verwandelt, z. B. wenn statt der Summe die Differenz gegeben wird, oder umgekehrt.

---

*) Ebenso und noch einfacher für Konstruktion und Beweis hätte man den Kreis an seiner Stelle lassen und C auf die entgegengesetzte Seite hinüberlegen, alsdann von der neuen Lage aus an den Kreis eine Tangente ziehen können. Obige Konstruktion ist jedoch wegen des Folgenden gewählt worden.

Digitized by Google

In beiden Beziehungen gründet sich die Berechtigung zur Anwendung von Analogieschlüssen auf den durch die ganze Mathematik sich hindurchziehenden Gegensatz zwischen dem Positiven und Negativen. Wird z. B. die Lage eines Punktes innerhalb eines Kreises oder einer andern Figur, oder zwischen zwei gegebenen Punkten auf einer gegebenen geraden Linie als positiv betrachtet, so ist die Lage eines analogen Punktes außerhalb eines Kreises oder einer andern Figur, oder auf einer geraden Linie, aber auf der Verlängerung des durch die zwei gegebenen Punkte auf ihr begrenzten Theiles derselben als negativ zu betrachten. Ebenso ist die Differenz nichts anderes als eine Summe, welche dadurch entsteht, daß zu einer gegebenen positiven Größe nicht wieder eine positive, sondern eine negative addirt wird. Nun ist schon aus den einfacheren Aufgaben der Algebra bekannt, daß, sobald dieselben verallgemeinert werden, aus der Verallgemeinerung sich Formeln ergeben, welche in der Regel weit umfassender sind, als die Aufgaben selbst, so daß insbesondere durch Beachtung des Positiven und Negativen aus einer Formel leicht die analoge für die entgegengesetzte Aufgabe abgeleitet werden kann. Ein Beispiel diene zur Erläuterung.



Zwei Reisende, A und B, gehen von den Orten M und N ab, A 3 Tage früher als B; sie reisen einander entgegen (also jeder in der Richtung des an seinem Wege gezeichneten Pfeiles), A mit einer Geschwindigkeit von 8 Meilen für jeden Tag, B mit einer täglichen Geschwindigkeit von 6 Meilen; nach wie viel Tagen werden sie einander in O begegnen, wenn die Entfernung der Orte M und N 178 Meilen beträgt. Die algebraische Auflösung ist folgende: Es sei die Zeit, welche von der Abreise des B bis zum Zusammentreffen in O verfließt, = x Tagen, so ist A 3 Tage länger auf der Reise, oder x + 3 Tage; der ganze Weg des A beträgt daher (x + 3)8 Meilen = 8 x + 24 Meilen, der des B aber x . 6 = 6 x Meilen. Beim Zusammentreffen aber hat A den Weg MO, B den Weg NO, beide also zusammen den Weg MN zurückgelegt, woraus sich die Gleichung ergibt:

Digitized by Google

$8x + 24 + 6x = 178$; also
$14x = 178 - 24 = 154$; und daher
$$x = \frac{154}{14} = 11.$$

Beide Reisende treffen daher zusammen 11 Tage nach der Abreise des B, also 14 Tage nach der Abreise des A; und wirklich hat auch in dieser Zeit A $14.8 = 112$ Meilen, und B $11 . 6 = 66$ Meilen, beide also zusammen $112 + 66 = 178$ Meilen zurückgelegt.

Die Aufgabe verallgemeinert heißt: A und B gehen von den beiden a Meilen von einander entfernten Orten M und N ab und reisen einander entgegen; A geht m Tage früher ab als B und macht täglich p Meilen, B aber q Meilen; nach wie viel Tagen treffen sie zusammen?

Wenn man die Zeit, welche B braucht, $= x$ Tagen, also den von ihm zurückgelegten Weg $= qx$ Meilen setzt, so ist die von A gebrauchte Zeit $= x + m$ Tagen, also der zurückgelegte Weg $= (x + m)\,p = px + pm$ Meilen, und es ist

$$px + pm + qx = a;$$
$$(p + q)x = a - pm;$$
$$x = \frac{a - pm}{p + q} = \text{Zahl der von B gebrauchten Tage;}$$
$$x + m = \frac{a - pm}{p + q} + m = \frac{a - pm + pm + qm}{p + q}$$
$$= \frac{a + qm}{p + q} = \text{Zahl der von A gebrauchten Tage.}$$

Setzt man für das vorige spezielle Beispiel $a = 178$, $m = 3$, $p = 8$, $q = 6$, so ist $x = \frac{178 - 8.3}{8 + 6} = \frac{178 - 24}{14} = \frac{154}{14} = 11$, und $x + 3 = \frac{178 + 6.3}{8 + 6} = \frac{178 + 18}{14} = \frac{196}{14} = 14$, wie oben.

Digitized by Google

Aus den gefundenen Werthen aber lassen sich durch Analogie noch die Resultate mehrerer anderer Aufgaben ableiten. Wenn z. B. A nicht m Tage früher, sondern m Tage später abreist, alles Uebrige aber sonst unverändert bleibt, so bleibt auch das Resultat dasselbe, nur erhält m das entgegengesetzte Zeichen; es ergibt sich daraus, daß die Zahl der von B gebrauchten Tage $= x = \frac{a + pm}{p + q}$, die Zahl der von A gebrauchten Tage $= x - m = \frac{a - qm}{p + q}$ ist.

Wenn ferner in der ursprünglichen Aufgabe MN nicht als Summe, sondern als Differenz beider Wege erscheint, indem A und B einander nicht entgegenreisen, sondern A dem B nachreist, so kehrt sich die Richtung des von B eingeschlagenen Weges um, und es wird q negativ; man erhält daher aus den ursprünglichen Formeln folgende analoge:

$$\text{Zahl der Tage des B} = x = \frac{a - pm}{p - q},$$

$$\text{Zahl der Tage des A} = x + m = \frac{a - qm}{p - q}.$$

Geht A auch noch m Tage später statt früher ab, so kehrt sich auch das Zeichen für m um, und es ist die

$$\text{Zahl der Tage des B} = x = \frac{a + pm}{p - q},$$

$$\text{Zahl der Tage des A} = x - m = \frac{a + qm}{p - q}.$$

Zu den gleichen Resultaten konnte man für die letztern Fälle allerdings durch die nemliche Entwicklung gelangen, wie sie für den ersten Fall gegeben wurde; jedoch ist die obige Ableitung entschieden die bei weitem kürzere und führt schneller zum Endresultate.

Ganz ähnliche Verhältnisse nun zeigen sich in Betreff der geometrischen Aufgaben, so daß auch bei dem zweiten Hauptfalle

Digitized by Google

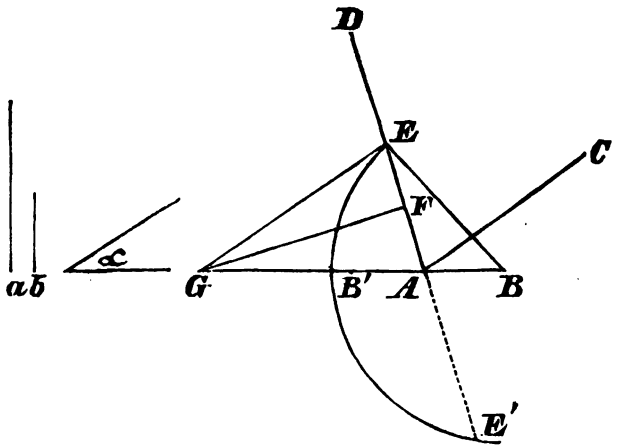
die Analogieschlüsse vollkommen gerechtfertigt erscheinen, sobald in allen Beziehungen die Bedingungen unverändert bleiben, nur daß irgend eine der gegebenen Größen aus dem Positiven in das Negative übergeht, oder umgekehrt. Es muß daher, wie in der Algebra die Formel, so hier die Konstruktion wesentlich die nemliche bleiben, nur daß, wie in der algebraischen Formel irgend eine Größe ihr Zeichen, so in der geometrischen Konstruktion irgend ein Theil derselben eine entgegengesetzte Lage oder Größe erhält.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dienen. Seite 71 ist die Aufgabe gelöst worden: ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Hypotenuse und die Summe beider Katheten gegeben sind. Es wurden für diese Aufgabe fünf Auflösungen gefunden, wovon drei zugleich Auflösungen einer allgemeinern Aufgabe (Seite 68) waren. Wir wollen nun die Aufgabe lösen: ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Hypotenuse = a und die Differenz beider Katheten = b gegeben sind. Da bei der schon gelösten Aufgabe die Analysis ausführlich gegeben ist, so bleibe es dem Schüler überlassen, genau dem dortigen Gange folgend die Analysis für die vorliegende Aufgabe zu suchen, und er wird dadurch ohne viele Mühe folgende fünf Konstruktionen finden, welche unmittelber aus den früheren durch Analogie abgeleitet sind, und daher auch so viel möglich genau mit denselben Worten wie früher hier ausgedrückt werden sollen. Die drei ersten Auflösungen sollen daher auch sich ebenfalls auf die allgemeinere Aufgabe beziehen: ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben sind eine Seite = a, der gegenüberliegende Winkel = α und die Differenz der beiden andern Seiten = b.

1. Auflösung.

Konstruktion. An AB = b lege in A einen Winkel BAC = α, halbire dessen Nebenwinkel B'AC durch AD,

Digitized by Google



und beschreibe von B als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = a einen Kreisbogen, der AD in E schneide, ziehe BE und errichte auf AE im Halbirungspunkte F einen Perpendikel FG, der AB in G treffe; endlich ziehe EG, so ist △ BEG das gesuchte.

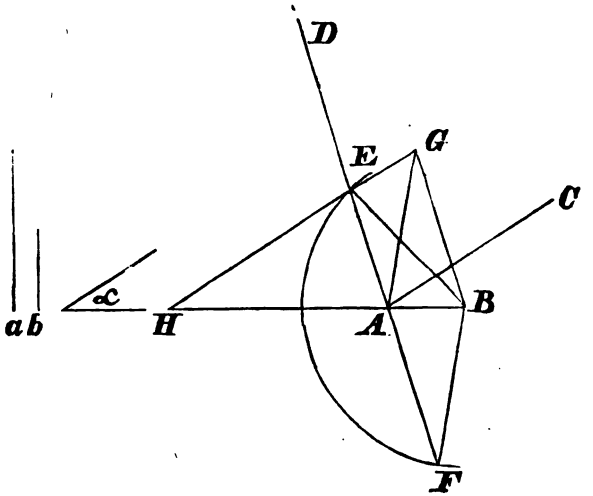
Beweis. BE = a; EG = AG, weil G auf dem im Halbirungspunkte auf AE errichteten Perpendikel liegt, also BG — EG = BG — AG = AB = b; endlich ist GEA = GAE = CAD, also EG ∥ AC, und daher EGB = CAB = α.

Zusatz. Es bleibt dem Schüler überlassen, die Verhältnisse zu untersuchen, wenn der zweite Durchschnitt E' des Kreisbogens mit der Halbirungslinie AD auf der Verlängerung von AD zur Konstruktion benützt wird.

2. Auflösung.

Konstruktion. An AB = b lege in A einen Winkel BAC = α an, halbire seinen Nebenwinkel durch AD, und beschreibe von B als Mittelpunkt mit a als Halbmesser einen

Digitized by Google



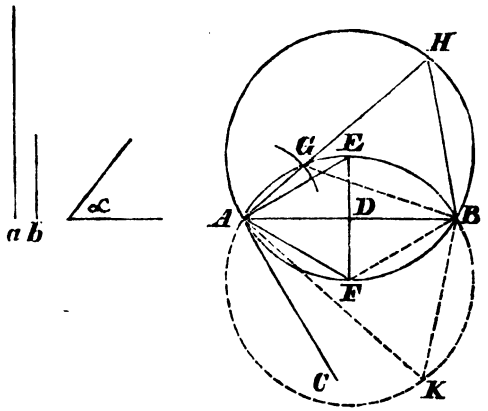
Kreisbogen, der AD und deſſen Verlängerung in E und F ſchneide, ziehe BE, BF und durch B und A Parallelen mit AD und BF, bis ſie ſich in G ſchneiden; endlich ziehe EG, welches verlängert die Verlängerung von AB in H ſchneide, ſo iſt △ BHE das geſuchte.

Beweis. BE = a. Da BE = BF iſt, ſo iſt BEF = BFE; ferner iſt BF ∥ GA; folglich iſt BFE = GAE; alſo auch BEF = GAE; nun iſt auch BE = BF = AG, und AE = AE; daher iſt △ BEA ≅ △ GAE, und daher BAE = GEA, alſo auch (weil ſie Nebenwinkel ſind) HAE = HEA, und daher EH = AH, folglich BH — EH = BH — AH = AB = b; endlich iſt HEA = HAE = DAC, alſo HE ∥ AC, und daher BHE = BAC = α.

3. Auflöſung.

Konſtruktion. An AB = a lege in A einen Winkel BAC = α; auf AB errichte im Halbirungspunkte D und auf AC in A Perpendikel, welche ſich in E ſchneiden; von E

Digitized by Google



als Mittelpunkt beschreibe mit EA als Halbmesser einen Kreisbogen, der durch B gehen wird, weil E von A und B gleichweit entfernt ist; die Ergänzung dieses Kreisbogens zum vollständigen Kreise schneide die Verlängerung des Perpendikels ED über D hinaus in F, ziehe FA und beschreibe von F als Mittelpunkt mit FA als Halbmesser einen zweiten Kreisbogen, der ebenfalls durch B gehen wird, da auch F von A und B gleichweit entfernt ist. Von A als Mittelpunkt beschreibe hierauf mit b als Halbmesser einen Kreisbogen, der den zweiten in G schneide, ziehe AG, und verlängere es, bis es den ersten Kreisbogen in H schneide; endlich ziehe BH, so ist △ ABH das gesuchte.

Beweis. AB = a; da AB Chorde und AC Tangente des ersten Kreisabschnittes AHB ist, so ist AHB = BAC = α; ziehe ferner GB, FB, ergänze den zweiten Kreisbogen AEB ebenfalls zum vollständigen Kreise, und ziehe an einen beliebigen Punkt K des Ergänzungsbogens zwei beliebige gerade Linien AK, BK, so ist AHB + AFB = 180° (als Kreisviereck), also AFB = 180° − α; folglich AKB = $\frac{1}{2}$AFB (weil AFB Centriwinkel, AKB Peripheriewinkel ist) = 90° − $\frac{1}{2}\alpha$, und daher, weil AGBK ebenfalls ein Kreisviereck, folglich AKB + AGB = 180° ist, AGB = 180° − AKB = 180° − 90° + $\frac{1}{2}\alpha$ = 90° + $\frac{1}{2}\alpha$; aber auch HGB + AGB = 180°; folglich ist HGB = AKB = 90° − $\frac{1}{2}\alpha$; ferner ist AGB = GHB + HBG, also HBG = AGB − GHB = 90° + $\frac{1}{2}\alpha$ − α = 90° − $\frac{1}{2}\alpha$; daher

Digitized by Google

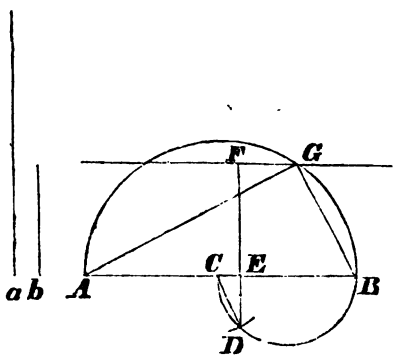
ist HGB = HBG, folglich auch HB = HG, und daher HA — HB = HA — HG = AG = b.

Zusatz. Der letzte Beweis erhält nur deßwegen eine etwas andere Gestalt als der analoge Beweis von Seite 71, wenn die Summe beider Seiten gegeben ist, weil in den meisten geometrischen Lehrbüchern zwar die auf Seite 71 angewendeten Sätze über Centriwinkel und Peripheriewinkel auf dem nemlichen Bogen, nicht aber die Sätze über Centriwinkel und Peripheriewinkel sich finden, wenn beide auf Bögen stehen, die sich zum vollständigen Kreise ergänzen; gerade die letztern Sätze aber finden hier ihre Anwendung, und mußten daher in den Beweis verflochten werden.

Die zwei nun folgenden Konstruktionen beziehen sich speziell auf das rechtwinklige Dreieck, oder setzen voraus, der gegebene Winkel α sei $= 90^0$.

4. Auflösung.

Konstruktion. Es sei a die gegebene Hypotenuse, b die gegebene Differenz beider Katheten; halbire AB = a in C; beschreibe über CB einen Halbkreis, und von C als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = $\frac{1}{2}$b einen Kreisbogen, der den Halbkreis in D schneide, von D fälle auf BC den Perpendikel DE; über AB beschreibe einen Halbkreis; verlängere DE nach F so, daß EF = EB wird, ziehe durch F eine Parallele mit AB, bis sie den Halbkreis in G trifft, und ziehe AG, BG, so ist △ ABG das verlangte.



Beweis. AGB = R, als Winkel im Halbkreise; AB = a; ferner ist $AG^2 + BG^2 = AB^2$, also $AG^2 + BG^2 - 2AG \cdot BG = AB^2 - 2AB \cdot EF$, d. h. $(AG - BG)^2 = AB^2 - 2AB \cdot EF = 4BC^2 - 4BC \cdot EF$

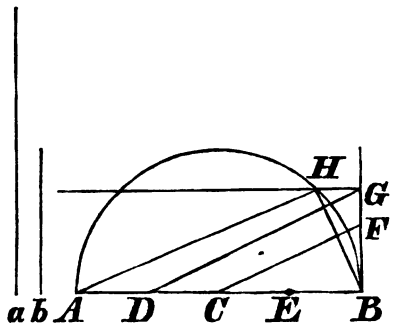
Digitized by Google

$= 4BC\ (BC - EF) = 4BC\ (BC - BE) = 4BC \cdot CE = 4CD^2 = 4 \cdot {}^1/_4 b^2 = b^2$; also ist $AG - BG = b$.

Zusatz. Die scheinbare Abweichung in der Konstruktion beruht darauf, daß sowohl hier als Seite 73 eigentlich eine stetige Proportion konstruirt wurde, von der das erste Glied $= {}^1/_2 a$, und das zweite $= {}^1/_2 b$ gegeben, das dritte aber gesucht wurde, daß aber Seite 73 ${}^1/_2 a$ das kleinere, hier dagegen ${}^1/_2 a$ das größere der beiden äußern Glieder werden mußte; es ist nemlich sowohl hier, als in der auf Seite 73 befindlichen Figur CB : CD = CD : CE.

5. Auflösung.

Konstruktion. AB = a halbire in C, schneide von CA und CB zwei Stücke $CD = {}^1/_2 b$ und $CE = {}^1/_2 b$ ab; auf AB errichte in B einen Perpendikel BF = BE, ziehe CF und durch D eine Parallele mit CF, bis sie die Verlängerung von BF in G trifft; über AB beschreibe hierauf einen Halbkreis und ziehe durch G eine Parallele mit AB, bis sie den Halbkreis in H trifft; endlich ziehe AH und BH, so ist △ ABH das verlangte.

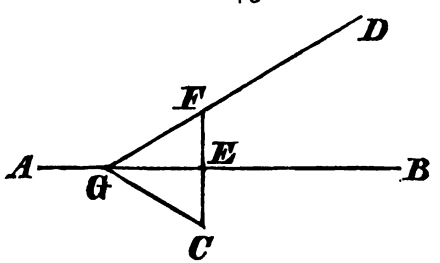


Beweis. AB = a, AHB = R; ferner ist $AH^2 + BH^2 = AB^2$; also $AH^2 + BH^2 - 2AH \cdot BH = AB^2 - 2AB \cdot BG$, d. h. $(AH - BH)^2 = AB^2 - 2AB \cdot BG = AB^2 - 4CB \cdot BG = AB^2 - 4DB \cdot BF$ (weil CB : BF = DB : BG, also $CB \cdot BG = DB \cdot BF$ ist) $= 4AC^2 - 4(BC + CD)(BC - CD)$ (weil BF = BE = AD = AC − CD = BC = CD ist) $= 4AC^2 - 4(BC^2 - CD^2) = 4AC^2 - 4BC^2 + 4CD^2 = 4CD^2 = 4 \cdot {}^1/_4 b^2$; also ist AH − BH = b.

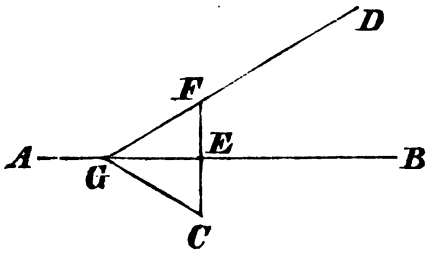
Digitized by Google

Gleiche Verhältnisse treten ein, wenn nicht die Größe, sondern die Lage einer in der Aufgabe gegebenen Bedingung die entgegengesetzte wird. Beispiele sind hier kaum nöthig, da schon oben Andeutungen in dieser Richtung gegeben wurden. Man vergleiche z. B. die Zusätze zu den Auflösungen der Aufgabe: in einen gegebenen Quadranten einen Kreis zu beschreiben, Seite 49 bis 58, wo gezeigt wurde, was geschehen müsse, wenn der Kreisbogen des Quadranten nicht von Innen, sondern von Außen, also die Halbmesser nicht selbst, sondern ihre Verlängerungen berührt werden sollen. Ebenso gehört hieher die Aufgabe Nr. 6, Seite 79, in welcher auf einer gegebenen Kreisperipherie, und zwar auf der einen Seite eines Durchmessers zwei Punkte gegeben sind, und auf der Peripherie des entgegengesetzten Halbkreises ein Punkt gesucht werden soll, mit der Eigenschaft, daß die beiden von ihm nach den gegebenen Punkten gezogenen geraden Linien den gegebenen Durchmesser in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte schneiden. Auch dort zeigen die Zusätze zu den gegebenen Auflösungen, was geschehen müsse, wenn der gesuchte Punkt nicht auf der Peripherie des entgegengesetzten, sondern auf der des nemlichen Halbkreises liegen soll, auf welchem auch die gegebenen Punkte liegen.

Es möge hier noch kurz auf die Aufgabe Seite 101 hingewiesen werden: auf einer gegebenen geraden Linie einen Punkt zu suchen mit der Eigenschaft, daß die von ihm nach zwei gegebenen, auf der nemlichen Seite der Linie liegenden Punkten gezogenen geraden Linien mit der Linie gleiche Winkel machen. Wenn nun die Aufgabe im Uebrigen die nemliche bleibt, die beiden gegebenen Punkte C und D aber nicht auf der gleichen Seite von der gegebenen geraden Linie AB, sondern auf entgegengesetzten Seiten liegen sollen, so wird man sich erinnern,



Digitized by Google



daß im ersten Falle der Punkt C oder D auf die entgegengesetzte Seite von D oder C gleichsam um AB wie um eine Axe hinübergedreht wurde; man wird daher hier das Gegentheil thun, und C auf die nemliche Seite hinüber drehen, auf welcher auch D liegt, woraus sich folgende Konstruktion ergibt: von C fälle auf AB einen Perpendikel CE und verlängere ihn so nach F, daß EF = CE wird, ziehe DF und verlängere es, bis es AB in G trifft, so ist G der gesuchte Punkt. Denn zieht man CG, so ist CE = FE, GE = GE, CEG = FEG = 90°, also $\triangle$ CEG $\cong$ $\triangle$ FEG, und daher CGE = FGE, d. h. CGB = DGB.

Ganz analog werden die Konstruktionen, wenn einer oder beide gegebene Punkte in Kreise, also die von dem gesuchten Punkte nach den gegebenen Punkten gezogenen geraden Linien in Tangenten oder Sekanten mit Chorden von gegebener Größe an die gegebenen Kreise übergehen.

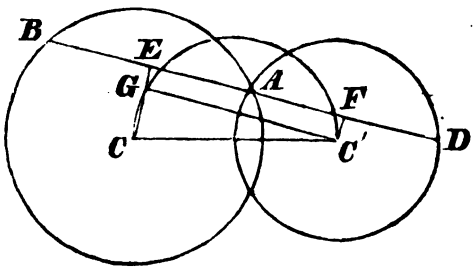
Besonders belehrend möchte etwa noch die folgende Aufgabe sein. In den meisten Beispielsammlungen findet sich die Aufgabe: durch einen der Durchschnittspunkte zweier einander schneidender Kreise eine gerade Linie so zu ziehen, daß das in die beiden Kreise fallende Stück derselben eine gegebene Größe habe. Drücken wir die Aufgabe schärfer aus, so lautet sie so: Durch einen der Durchschnittspunkte A zweier einander schneidender Kreise (mit den Mittelpunkten C und C') eine gerade Linie so hindurchzuziehen, daß die Summe der beiden in die Kreise hineinfallenden Chorden eine gegebene Größe = a habe. Bei diesem Ausdrucke sieht man sogleich, daß die Aufgabe in zwei Fälle zerfällt, je nachdem die beiden Chorden von einander Verlängerungen werden, oder theilweise auf einander fallen sollen; der obige erste Ausdruck der Aufgabe ist dann nichts

Digitized by Google

Anderes, als der hier genannte erste Fall. Für beide Fälle ist Analysis und Konstruktion folgende:

I. Fall.

Analysis. Es sei BD die gesuchte Linie, also BD = a; fälle von C und C′ auf BD die Perpendikel CE, C′F und ziehe CC′, so ist EA = ½BA und FA = ½DA, also EF = ½BD = ½a, folglich ist EF der Größe nach gegeben; in dem Trapeze CEFC′ ist aber auch FEC = 90°, also auch EFC′ = 90°, so wie CC′ und die Bedingung gegeben, daß EF durch A gehen soll, mithin ist dieses Trapez konstruirbar, da 4 von einander unabhängige Bedingungen gegeben sind; um seine Konstruktion zu finden, ziehe durch C′ eine Parallele mit BD, bis sie CE in G trifft, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke CGC′ die Hypotenuse CC′ und die Kathete C′G gegeben, also ist G, folglich C′G gegeben, folglich auch die durch A gehende Parallele BD mit C′G.



Konstruktion. Ziehe CC′, und beschreibe über CC′ einen Halbkreis, von C′ lege in denselben eine Chorde C′G = ½a, und ziehe durch A eine Parallele mit C′G, bis sie die Kreise in B und D schneidet, so ist BD die gesuchte Linie.

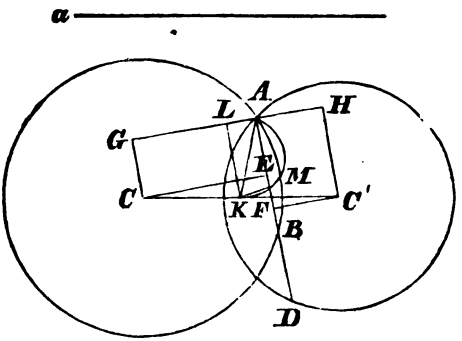
Beweis. Ziehe CG und verlängere es, bis es AB in E trifft, und durch C′ ziehe C′F ∥ CE. Da CGC′ als Winkel im Halbkreise = 90° ist, so ist auch CEF = 90°, weil BD ∥ C′G ist, daher ist auch C′FE = 90°, oder CE und C′F sind Perpendikel von den Mittelpunkten auf die Chorden AB und AD; daher ist AB = 2AE, AD = 2AF, also BD = 2AE + 2AF = 2EF = 2C′G (weil GEFC′ ein Rechteck, also EF = C′G ist) = 2 . ½a = a.

Digitized by Google

Zusatz. Eine zweite gerade Linie, welche durch A geht, erhält man, wenn man von C′ aus eine Chorde $= {}^1/_2 a$ in den zweiten über CC′ beschriebenen Halbkreis legt, und im Uebrigen wie oben verfährt.

II. Fall.

Analysis. Es sei wieder ABD die gesuchte Linie, so daß AB + AD = a sei; fälle von C und C′ auf BD die Perpendikel CE, C′F, so ist $AE = {}^1/_2 AB$ und $AF = {}^1/_2 AD$, also AE + AF = $^1/_2$(AB + AD) = $^1/_2$a; folglich ist AE + AF der Größe nach gegeben.



Ziehe ferner CC′, durch C und C′ Parallelen mit AD und durch A eine Parallele mit CE oder C′F, bis sie die erstern Parallelen in G und H trifft, so ist CGHC′ ein Trapez, CGAE und C′HAF aber Rechtecke, also CG = AE, C′H = AF, und daher CG + C′H = AE + AF, folglich der Größe nach gegeben; in dem Trapeze CGHC′ ist aber außerdem noch CGA = 90°, also auch C′HG = 90°, CC′ und die Bedingung gegeben, daß GH durch A gehen soll; also sind 4 von einander unabhängige Bedingungen gegeben, folglich ist das Trapez bestimmt, und zwar wird zu seiner Bestimmung am besten CC′ und GH in K und L halbirt, und KL gezogen, wodurch sich KL = $^1/_2$(CG + C′H) = $^1/_4$a als gegeben und KLA = 90° ebenfalls als gegeben zeigt, da KL ∥ CG wird; also da K und A gegeben sind, ist auch das rechtwinklige Dreieck AKL gegeben; folglich wenn von K auf AD der Perpendikel KM gefällt wird, wodurch KLAM als Rechteck erscheint, ist auch △ AMK, also M, also auch AMBD gegeben.

Digitized by Google

Konstruktion. Ziehe CC′ und halbire es in K, ziehe AK, und beschreibe über AK als Durchmesser einen Halbkreis; von A lege in denselben eine Chorde AM = ¼a, und verlängere sie, bis sie beide Kreise in B und D trifft, so ist ABD die gesuchte Linie.

Beweis. Von C und C′ fälle auf ABD die Perpendikel CE und C′F, wodurch AB in E, AD in F halbirt wird; ferner ziehe durch A eine Parallele mit CE oder C′F, und durch C und C′ Parallelen mit AD, welche die vorige Parallele in G und H treffen; endlich ziehe KM, und KL ∥ AM, so ist CGHC′ ein Trapez, CGAE, C′HAF und AMKL aber Rechtecke; also ist AE = CG, AF = C′H und AM = KL; da nun CC′ in K halbirt und KL ∥ AD ∦ CG ist, so ist CG + C′H = 2KL = 2AM, also auch AE + AF = 2AM; folglich 2AE + 2AF = 4AM, d. h. AB + AD = 4 . ¼a = a.

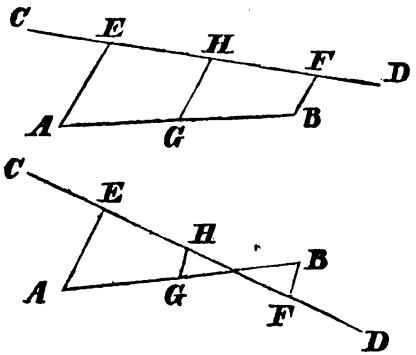
Zusatz. Eine zweite gerade Linie, welche durch A geht, erhält man, wenn man von A aus eine Chorde = ¼a in den zweiten über AK beschriebenen Halbkreis legt, und im Uebrigen wie oben verfährt.

Es sei nun die gegentheilige Aufgabe gegeben: Durch einen der Durchschnittspunkte A zweier einander schneidender Kreise (mit den Mittelpunkten C und C′) eine gerade Linie so hindurch zu ziehen, daß die Differenz der beiden in die Kreise hineinfallenden Chorden eine gegebene Größe = a habe.

Es liegt der Gedanke sehr nahe, daß, weil die Bedingung eine gegentheilige geworden ist, und daher auch die Lage eine gegentheilige werden muß, hier der erste Fall sich konstruiren lassen müsse, wie dort der zweite und umgekehrt; denn gerade beide Fälle unterscheiden sich durch die gegentheilige Lage der Chorden. Und in der That können unter dieser Voraussetzung beide Konstruktionen wörtlich gleichlautend ausgedrückt werden, die Unterschiede in den Beweisen aber liegen blos darin, daß wieder die Lehrbücher der ebenen Geometrie den bekannten Satz

Digitized by Google

enthalten, daß die durch den Halbirungspunkt der einen nicht-parallelen Seite eines Trapezes parallel mit den parallelen Seiten gezogene gerade Linie die andere nicht parallele Seite des Trapezes ebenfalls halbire, und die Hälfte sei von der Summe der parallelen Seiten, während ein ganz analoger allgemeinerer Satz gewöhnlich fehlt, also bei den Analysen und Beweisen nicht so unmittelbar vorausgesetzt werden darf; es ist dieß folgender Satz: Wenn von zwei Punkten A und B nach einer beliebigen geraden Linie CD zwei beliebige Parallelen AE, BF gezogen werden, und durch den Halbirungspunkt G der Linie AB eine dritte Parallele GH mit jenen beiden gezogen wird,



so wird dadurch auch EF in H halbirt, und GH ist gleich der halben Summe oder gleich der halben Differenz von AE und BF, je nachdem diese letztern beiden Parallelen auf der nemlichen Seite oder auf entgegengesetzten Seiten von CD liegen. Es ist klar, daß die erste Bedingung nichts anderes ist, als obiger Satz über das Trapez, die letztere aber in dem zweiten Falle der vorigen Aufgabe ihre Anwendung findet.

Demgemäß erhalten wir für die neue Aufgabe folgende zwei Auflösungen.

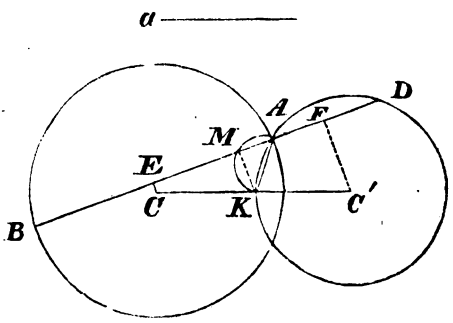
I. Fall.

Konstruktion.*) Ziehe CC′ und halbire es in K, ziehe AK und beschreibe über AK als Durchmesser einen Halbkreis;

*) Auch in diesen Konstruktionen sind die Buchstaben gegen die Seite 27 angegebene Regel gewählt worden, um die Uebereinstimmung mit den Seite 115 und 116 angegebenen Konstruktionen noch auffallender zu machen.

Digitized by Google

von A lege in denselben eine Chorde AM = $^1/_4$a, und verlängere sie, bis sie beide Kreise in B und D trifft, so ist BD die gesuchte Linie.

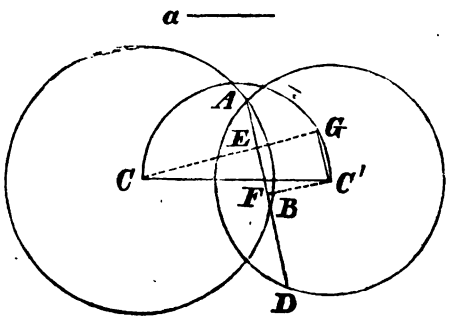


Beweis. Ziehe KM, und durch C und C′ Parallelen mit KM, bis sie BD in E und F schneiden. Da KMA = 90° ist als Winkel im Halbkreis, so ist auch CEM = 90° und C′FD = 90°, oder CE und C′F stehen senkrecht auf BD; daher ist BA = 2AE, und DA = 2AF; nun ist CC′ in K halbirt, und KM ∥ CE, also ist auch EF in M halbirt, also ist EM = MF, folglich AE = EM + MA = MF + MA = MA + AF + MA = AF + 2MA, also AE − AF = 2MA, und daher 2AE − 2AF = 4MA, d. h. BA − DA = 4 . $^1/_4$a = a.

Zusatz. Auch hier erhält man eine zweite durch A gehende Linie, wenn man von A aus eine Chorde = $^1/_4$a in den zweiten über AK beschriebenen Halbkreis legt und dann wie oben verfährt.

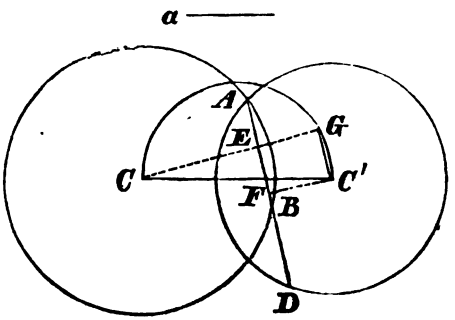
II. Fall.

Konstruktion. Ziehe CC′, und beschreibe über CC′ einen Halbkreis; von C′ lege in denselben eine Chorde C′G = $^1/_2$a und ziehe durch A eine Parallele mit C′G, bis sie die Kreise in B und D schneidet, so ist ABD die gesuchte



Digitized by Google

Beweis. Ziehe CG, welches AD in E schneide. und fälle von C′ auf AD den Perpendikel C′F. Da CGC′ = 90° ist, als Winkel im Halbkreis, so steht CG auf C′G, also auch auf der Parallele ABD senkrecht; daher ist AB in E halbirt,



ebenso ist AD in F halbirt, und CG ist ‖ C′F, also ist EFC′G ein Parallelogramm und daher EF = C′G; nun ist AF—AE = EF = C′G, also ist 2AF—2AE = 2C′G, d. h. AD—AB $2.\frac{1}{2}a = a$.

Zusatz. Auch hier erhält man eine zweite durch A gehende Linie, wenn man von C′ aus eine Chorde = $\frac{1}{2}a$ in den zweiten über CC′ beschriebenen Halbkreis legt, und dann wie oben verfährt.

Die Vergleichung der in diesem Paragraphen behandelten Aufgaben mit den früheren, Seite 66 bis 74, so wie frühere Betrachtungen bei den Aufgaben I. und VI. des zweiten Paragraphen im zweiten Buche (Seite 49 und 79) zeigen das Verhältniß der Aufgaben zu einander auf das Deutlichste, wenn Summe in Differenz übergeht oder wenn die Lage eine entgegengesetzte wird. Insbesondere erhellt daraus, daß in solchen Fällen die Konstruktion wesentlich ganz unverändert bleibt, daß aber irgend ein Theil der Figur die entgegengesetzte Lage annimmt, daß z. B. Punkte auf eine Linie selbst fallen, statt auf ihre Verlängerung, oder umgekehrt, daß dieselbe in einem Falle auf der einen, im andern auf der entgegengesetzten Seite einer Linie liegen, daß das einemal ein Winkel, das anderemal sein Nebenwinkel halbirt wird, daß ebenso das einemal ein Kreisbogen oder Kreisabschnitt benützt wird, das anderemal sein Ergänzungsbogen oder Ergänzungsabschnitt zum vollständigen Kreise,

Digitized by Google

ebenso daß das einemal der eine Durchschnitt eines Kreises mit einer geraden Linie oder einem Kreise, das andremal der andere benützt wird, daß, wenn die Halbirungslinie eines Winkels zweimal vorkommt, das einemal die eine Hälfte, das anderemal die andere halbirt wird, daß also z. B. das einemal ein Winkel $= {}^1/_4$R, das andremal einer $= {}^3/_4$R verwendet wird, daß das einemal der eine Endpunkt eines Durchmessers, das anderemal der andere benützt wird und Aehnliches.

Bei näherem Eindringen in die Verhältnisse erkennt der Aufmerksame häufig namentlich Gegensätze der Lage, die nicht so offen und unmittelbar in die Augen fallen. Ein solcher Gegensatz findet z. B. bei Trapezaufgaben statt in allen Fällen, wo statt der Summe oder Differenz der beiden nichtparallelen Seiten, oder statt anderer auf diese beiden Stücke sich beziehenden Bedingungen, die entsprechenden Bedingungen in Beziehung auf beide Diagonalen gegeben sind. Denn die beiden nichtparallelen Seiten können betrachtet werden als die Verbindungslinien zweier begrenzter parallelen geraden Linien, die sich außerhalb der Parallelen schneiden, die beiden Diagonalen aber als solche, die sich zwischen ihnen schneiden. Diese Analogie zeigt sich daher z. B. auch in Betreff eines bekannten Lehrsatzes. Alle Lehrbücher geben den Lehrsatz: die Verbindungslinie der Halbirungspunkte beider nichtparallelen Seiten eines Trapezes ist gleich der halben Summe beider parallelen Seiten. Diesem Satze nun entspricht der ganz analoge Satz: die Verbindungslinie der Halbirungspunkte beider Diagonalen eines Trapezes ist gleich der halben Differenz beider parallelen Seiten. Aehnliche Gegensätze findet der Nachdenkende zahlreich durch alle Theile der Geometrie.

---

§. 3.

Die Auflösung der Aufgaben durch Reduktion.

Wie die Analogie, so gibt uns auch die Reduktion ein Mittel zur Lösung von Aufgaben, wobei die bei frühern Auf-

Digitized by Google

gaben gemachten Erfahrungen bei der Analysis und Konstruktion der neuen Aufgabe benützt werden. Die Reduktion besteht darin, daß man eine zusammengesetzte Aufgabe durch Zerlegung in ihre Bestandtheile auf eine schon gelöste zurückführt, so daß man also, um die neue zu lösen, zunächst die früher gelöste Aufgabe wieder zu konstruiren nöthig hat.

Bei genauerer Betrachtung werden allerdings die Konstruktionen aller zusammengesetzten Aufgaben auf die Konstruktionen schon gelöster Aufgaben zurückgeführt; denn immer sind Winkel an gerade Linien in bestimmten Punkten anzulegen, Winkel zu halbiren, Parallelen zu ziehen, Perpendikel zu errichten oder zu fällen, Kreisabschnitte zu beschreiben, welche gegebene Winkel fassen, Tangenten zu ziehen u. dgl., überhaupt sind es die in allen Lehrbüchern der ebenen Geometrie, selbst in solchen, welche den Inhalt dieser Wissenschaft möglichst kurz und zusammengedrängt geben, vorkommenden einfacheren Aufgaben, die beinahe bei jeder Konstruktion von zusammengesetzten Aufgaben ihre Anwendung finden, so daß man die angedeuteten Aufgaben und ihre Konstruktionen als Fundamentalaufgaben und Fundamentalkonstruktionen bezeichnen kann.

Von diesem Gesichtspunkte aus kann man sagen, daß alle zusammengesetzten Aufgaben durch Reduktion gelöst werden müssen. Man versteht jedoch unter der Auflösung durch Reduktion vorzugsweise die Zurückführung einer gegebenen Aufgabe auf eine solche schon gelöste, die nicht zu den Fundamentalaufgaben gehört, sondern selbst als eine zusammengesetztere zu betrachten ist.

Ein Beispiel einer solchen Reduktion erhielten wir Seite 94, wo die Aufgabe: ein Dreieck zu konstruiren, von welchem die Summe zweier Seiten, der von ihnen eingeschlossene Winkel und der zur dritten Seite gehörige Höhenperpendikel gegeben sind, zurückgeführt wurde auf die Seite 44 gelöste Aufgabe: ein Dreieck zu konstruiren, von welchem eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Halbirungslinie dieses Winkels gegeben sind.

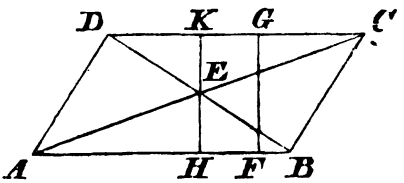
Die Analysis einer Aufgabe kann natürlich als beendigt betrachtet werden, sobald sie soweit gediehen ist, daß die Auf-

Digitized by Google

gabe zurückgeführt wurde auf die Konstruktion einer schon gelösten Aufgabe; denn es wäre in einem solchen Falle nichts weiter zu thun, als die Analysis der letztern Aufgabe wieder abzuschreiben, was doch ein ganz überflüssiges Geschäft wäre. Bestimmte Regeln über die Reduktion lassen sich aber um so weniger aufstellen, da eben der eingeschlagene Gang der Analysis selbst erst zeigen muß, ob eine Aufgabe auf eine andere reduzirt werden kann oder nicht.

Im Allgemeinen läßt sich übrigens Folgendes bemerken. Es sind vorzugsweise die Vierecks- und andere Vielecks-Aufgaben, unter den Viereckaufgaben aber besonders die Aufgaben über Parallelogramme oder Trapeze, welche ihrem großen Theile nach auf Dreiecksaufgaben zurückgeführt werden können.

Es sei z. B. die Aufgabe zu lösen: ein Parallelogramm zu konstruiren, von welchem gegeben sind die Summe beider Diagonalen, der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, und die Entfernung zweier parallelen Seiten von einander, so erhält man folgende kurze Analysis: es sei ABCD das gesuchte Parallelogramm, von welchem gegeben sei AC + BD = a, AEB = α, und FG = b. Da die Diagonalen einander gegenseitig halbiren, so ist AE + EB = $^1/_2$(AC + BD) = $^1/_2$ a,

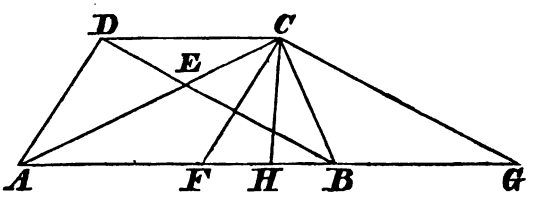


also gegeben; fälle ferner von E einen Perpendikel EH auf AB und verlängere ihn nach K, so ist HK = FG = b, aber EH = $^1/_2$HK, also EH = $^1/_2$b, also ist auch EH gegeben; mithin ist die Aufgabe reduzirt auf die Seite 94 gelöste: ein Dreieck AEB zu konstruiren, von welchem gegeben ist die Summe zweier Seiten AE + EB = $^1/_2$a, der eingeschlossene Winkel AEB = α und der zur dritten Seite gehörige Höhenperpendikel EH = $^1/_2$ b.

Nicht immer liegt freilich die Reduktion einer Viereckaufgabe so offen und klar da, wie im vorliegenden Falle. Es sei

Digitized by Google

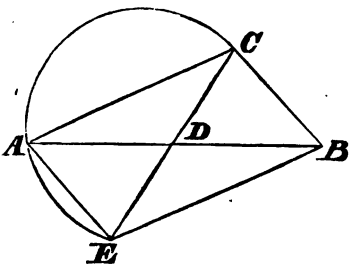
z. B. die Aufgabe zu lösen: ein Trapez zu konstruiren, von welchem gegeben sind die beiden nichtparallelen Seiten, die Summe der Winkel, welche dieselben mit einer der parallelen Seiten machen und der Winkel, unter welchem sich die Diagonalen schneiden. Wir erhalten folgende Analysis: Es sei ABCD das gesuchte Trapez, von welchem gegeben sei AD = a, BC = b, DAB + CBA = α, AEB = β.



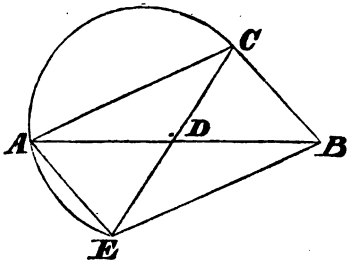
Die Analysis der Aufgaben über das Trapez wird in sehr vielen Fällen wesentlich gefördert, wenn dasselbe durch eine Parallele mit einer der nichtparallelen Seiten, welche durch einen Endpunkt der kleinern von den parallelen Seiten gezogen ist, in ein Parallelogramm und in ein Dreieck zerlegt wird. Versuchen wir dieß also auch hier und ziehen CF ∥ DA, so ist in △ BCF gegeben CF = AD = a, BC = b und CFB + CBF = α (weil CFB = DAB ist), also auch FCB = $180^0 - \alpha$, wodurch △ BCF, also die Punkte B, C, F bestimmt sind. Für die weitere Analysis ist nun natürlich außer dem, was durch die Bestimmung von △ BCF als gegeben betrachtet werden kann, noch der Winkel AEB = β zu benützen. Um denselben mit dem schon Gefundenen in nähere Beziehung zu bringen, verlegen wir ihn dadurch an den Punkt C, daß wir durch C eine Parallele mit DB ziehen, bis sie die Verlängerung von AB in G trifft, wodurch ACG = AEB = β gegeben ist, was uns weiter darauf leitet, die Bestimmung von △ ACG zu versuchen. Da BG = CD und CD = AF ist, so ist BG = AF; halbirt man daher BF in H und zieht CH, so ist auch BH = FH, also GH = AH, oder CH ist Mittellinie von △ ACG, zugleich aber auch Mittellinie von △ CBF; folglich da △ CBF gegeben ist, so ist auch CH der Größe und der Lage nach gegeben; die Aufgabe ist also reduzirt auf die Aufgabe: ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist ein

Digitized by Google

Winkel, die zu diesem Winkel gehörige Mittellinie und der Winkel, welchen diese Mittellinie mit der gegenüberliegenden Seite macht. Da diese Aufgabe im Früheren noch nicht gelöst wurde, so versuchen wir zunächst eine von der vorigen Aufgabe gänzlich unabhängige Lösung der letztern Aufgabe, deren Analysis sich wohl auf folgende Art am einfachsten gestalten möchte: Es sei ABC das gesuchte Dreieck, von welchem ACB, CD und CDA gegeben sei. Da bei Dreiecksaufgaben, bei welchen Mittellinien vorkommen, der erste Versuch, zu einer Analysis zu gelangen, zunächst dadurch gemacht wird, daß man die Mittellinie um ihre eigene Länge verlängert, und dadurch das Dreieck zum Parallelogramme ergänzt (vergl. auch Seite 33), so verlängern wir auch hier CD so nach E, daß DE = CD wird, und ziehen AE, BE, wodurch ACBE ein Parallelogramm wird, weil AD = BD, ED = CD, ADE = CDB, also $\triangle$ ADE $\cong$ $\triangle$ CDB und daher AE = BC und AED = DCB, also auch AE $\parallel$ BC ist. In diesem Parallelogramme nun ist CD, also auch CE = 2CD, ACB und ADC gegeben; die Aufgabe ist also reduzirt auf die Lösung der Aufgabe: ein Parallelogramm zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Diagonale, der Winkel, durch den sie geht, und der Winkel, unter dem sich beide Diagonalen schneiden. Da ACB gegeben ist, so ist auch EAC = 180° — ACB gegeben; folglich ist der Kreisabschnitt über EC gegeben, der den Winkel EAC fassen muß, auf dessen Peripherie also A liegt; nun ist auch CDA gegeben, also die Lage von DA; folglich ist der Punkt A gegeben, Man erhält dadurch für die beiden letztern Aufgaben folgende gemeinschaftliche Konstruktion: über CE gleich der gegebenen Diagonale oder gleich der doppelten gegebenen Mittellinie beschreibe einen Kreisabschnitt, der einen Winkel faßt, welcher dem Nebenwinkel des Winkels gleich ist, durch welchen die Diagonale

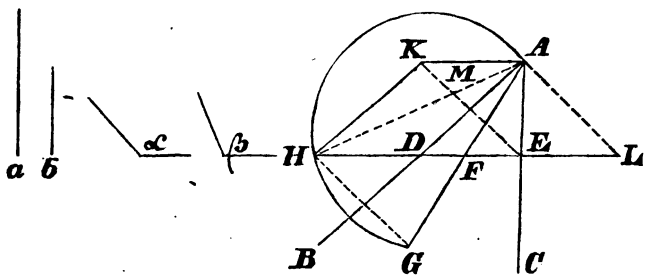


Digitized by Google



oder Mittellinie geht; an CE lege im Halbirungspunkte D einen Winkel CDA an gleich dem Winkel, unter dem sich die Diagonalen schneiden, oder den die Mittellinie mit der Gegenseite macht, und verlängere den Schenkel, bis er den Kreisabschnitt in A trifft, ziehe CA, EA, verlängere AD so nach B, daß BD = AD wird, und ziehe BC, BE, so ist ACBE das in der letzten Aufgabe gesuchte Parallelogramm, oder ACB das in der vorletzten gesuchte Dreieck, wie sich für beide Fälle leicht beweisen läßt.

Nach diesen Vorbereitungen und Reduktionen erhalten wir nun folgende Konstruktion der frühern Aufgabe über das Trapez:



Es seien gegeben die beiden nichtparallelen Seiten = a und b, die Summe der Winkel, welche sie mit einer der parallelen Seiten machen, = α, und der Winkel, unter dem sich die Diagonalen schneiden, = β; von den Schenkeln eines Winkels BAC, welcher gleich dem Nebenwinkel des Winkels α ist, schneide AD = a, AE = b ab, und ziehe DE, halbire DE in F und ziehe AF; verlängere AF so nach G, daß GF = AF wird, und beschreibe über AG als Chorde einen Kreisabschnitt,

Digitized by Google

der einen Winkel faßt, welcher dem Nebenwinkel von β gleich ist; verlängere ED bis zur Peripherie dieses Kreisabschnittes nach H und ziehe durch A und H Parallelen mit DH und AD, bis sie sich in K schneiden, so ist AEHK das gesuchte Trapez.

Beweis. Da ADHK nach der Konstruktion ein Parallelogramm ist, so ist $HK = AD = a$, ferner ist $AE = b$, weiter ist $DAE + \alpha = 180^0$; aber auch $DAE + ADE + AED = 180^0$; also ist $ADE + AED = \alpha$; aber $KHE = ADE$, folglich auch $KHE + AED = ADE + AED = \alpha$; ziehe endlich HA, KE, HG, verlängere HF so nach L, daß $FL = HF$ wird, und ziehe AL. Da $HF = FL$, $FG = FA$ und $HFG = LFA$ ist, so ist $\triangle FGH \cong \triangle FAL$, und daher $GHF = ALF$, also $GHF + FHA = ALF + FHA$; d. h. $GHA = ALF + FHA$; aber $ALF + FHA + HAL = 180^0$, und $GHA + \beta = 180^0$; folglich ist $HAL = \beta$; nun ist $HF = FL$, $DF = FE$, also $HD = EL$; aber $HD = KA$, also auch $EL = KA$; da nun auch $EL \parallel KA$ ist, so ist ELAK ein Parallelogramm, oder $EK \parallel AL$, folglich wenn AH und EK einander in M schneiden, so ist auch $HME = HAL = \beta$.

Wenn somit Vierecks-, namentlich Parallelogramm- und Trapezaufgaben häufig auf Dreiecksaufgaben reduzirt und dadurch vereinfacht werden, so kommt dagegen nicht selten der Fall vor, daß umgekehrt die Analysis einer Dreiecksaufgabe dadurch erleichtert wird, daß man die Dreiecksaufgabe auf eine Aufgabe über ein Parallelogramm reduzirt. Es geschieht dieß, wie bei den letztern Aufgaben bemerkt wurde, hauptsächlich dann, wenn unter den Bedingungen für die Konstruktion des Dreiecks eine Mittellinie gegeben ist, wobei die Seite, zu welcher die Mittellinie gehört, die eine Diagonale des Parallelogramms, die Mittellinie selbst aber die Hälfte der andern Diagonale wird. Beispiele darüber sind überflüssig, da wir schon solche Fälle Seite 33 und Seite 125 hatten.

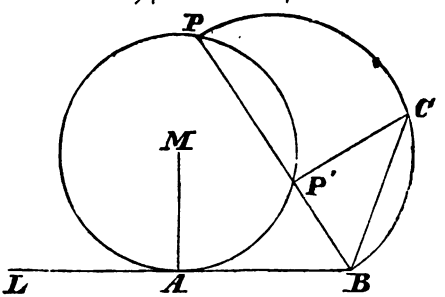
Viel Belehrendes über die Anwendung des Mittels der Reduktion gewähren die Aufgaben über Kreise, welche durch gegebene Punkte gehen, oder gegebene gerade Linien oder Kreise

Digitized by Google

berühren sollen. Wir wollen daher zum Schluße dieses Paragraphen dieselben hier etwas näher betrachten. Zu bemerken ist dabei für das Folgende, daß die meisten der hier berührten Aufgaben auch noch andere, manchmal sogar elegantere Auflösungen als die gegebenen zulassen, daß aber hier gerade diejenigen Auflösungen gewählt wurden, welche als Beispiele von Reduktionen dienen können.

Wir übergehen die beiden Aufgaben, einen Kreis zu beschreiben, der durch drei gegebene Punkte geht, oder drei gegebene gerade Linien berührt, da sie in allen Lehrbüchern behandelt werden, und daher hier als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, und beginnen mit der Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte P und P′ geht und eine gegebene gerade Linie L berührt.

Analysis. Es sei M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, also wenn von M auf L der Perpendikel MA gefällt wird, MA der Halbmesser desselben; ziehe PP′ und verlängere es bis es L in B trifft.



Da P und P′ gegeben sind, so ist auch PP′, also auch sein Durchschnitt B mit L gegeben. Da nun BA Tangente, BP Sekante an dem Kreis M ist, so ist $BA^2 = BP \cdot BP'$; folglich da BP und BP′ gegeben sind, ist auch BA, folglich auch A gegeben; also ist die Aufgabe reduzirt entweder auf die Aufgabe: einen Kreis zu beschreiben, der durch drei gegebene Punkte P, P′, A geht, oder auf die Aufgabe: einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt P oder P′ geht, und eine gegebene gerade Linie L in einem gegebenen Punkte A berührt; die Lösung beider Aufgaben ist bekannt.

Konstruktion. Verlängere PP′ bis es L in B trifft; über PB als Durchmesser beschreibe einen Halbkreis, errichte

Digitized by Google

auf PB in P′ einen Perpendikel, bis er den Halbkreis in C trifft, ziehe BC und von L schneide BA = BC ab; beschreibe hierauf einen Kreis, der durch die drei Punkte P, P′, A geht, so ist dieser der gesuchte.

Beweis. Da $BA^2 = BP \cdot BP'$ ist, und P und P′ auf dem gefundenen Kreise liegen, so trifft derselbe die Linie L in A so, daß BA nicht Sekante, sondern Tangente des Kreises ist, also berührt der Kreis die Linie L.

Zusatz 1. Ist PP′ ∥ L, so wird der Punkt A einfacher dadurch erhalten, daß man PP′ zieht, im Halbirungspunkte einen Perpendikel errichtet und denselben bis zum Durchschnitte mit L verlängert. Ebenso entsteht eine kürzere Konstruktion, wenn P oder P′ auf L liegt.

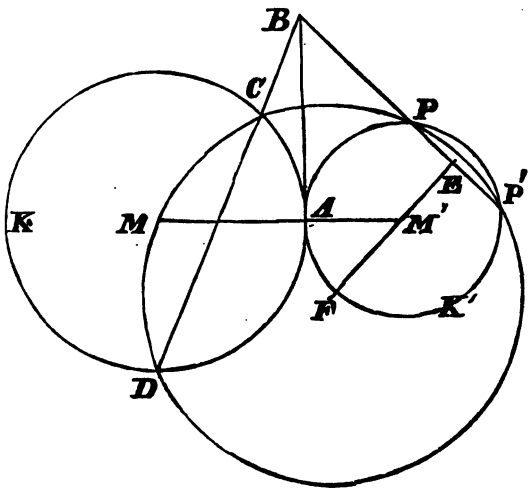
Zusatz 2. Einen zweiten Kreis erhält man, wenn man BA = BC von L auf der andern Seite von A aus abschneidet.

Zusatz 3. Die Konstruktion wird unmöglich, wenn P und P′ auf entgegengesetzten Seiten von L liegen oder beide auf L fallen.

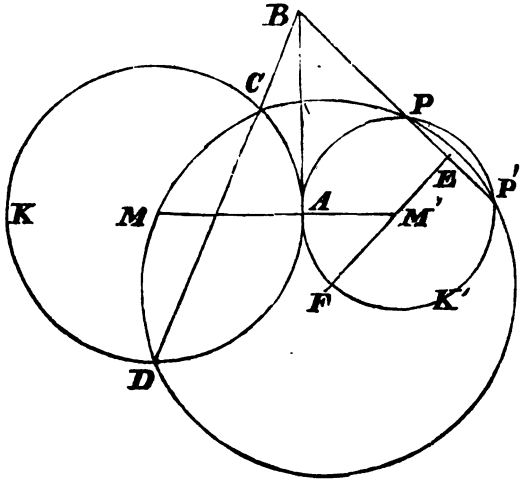
II. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte P, P′ geht und einen gegebenen Kreis K berührt.

Analysis. Es sei K′ der gesuchte Kreis und M der Mittelpunkt des gegebenen, M′ der des gesuchten Kreises, so geht MM′ durch den gemeinschaftlichen Berührungs-



Digitized by Google



punkt beider Kreise und eine Senkrechte auf MM' in A ist gemeinschaftliche Tangente beider Kreise. Zieht man nun wieder PP' und verlängert es, bis es diese Tangente in B trifft, so ist $BP \cdot BP' = BA^2$; zieht man durch K von B aus eine beliebige Sekante BD, so ist auch $BC \cdot BD = BA^2$; also ist $BP \cdot BP' = BC \cdot BD$, und daher liegen P, P', C, D auf der Peripherie eines Kreises. Es können also zwei Punkte C, D auf K willkürlich bestimmt werden, wodurch CD gegeben ist, also ist auch ihr Durchschnitt B mit PP' gegeben, folglich durch die von B an K gezogene Tangente der Berührungspunkt A auf K. Daher ist die obige Aufgabe reduzirt auf die Aufgabe: durch drei gegebene Punkte P, P', A einen Kreis zu beschreiben.

Konstruktion. Ziehe PP', errichte auf PP' im Halbirungspunkte E einen Perpendikel, und nimm auf demselben einen Punkt F beliebig, aber so, daß ein von F als Mittelpunkt mit FP als Halbmesser beschriebener Kreis den Kreis K in zwei Punkten C und D schneidet; ziehe CD, PP' und verlängere beide, bis sie sich in B schneiden; von B ziehe an den Kreis K die Tangente BA und beschreibe einen Kreis K', der durch die drei Punkte P, P', A geht, so ist dieser der gesuchte.

Beweis. Der Kreis K' geht durch die beiden Punkte P und P' und hat mit dem Kreise K den Punkt A gemein; folglich ist nur noch zu beweisen, daß K und K' einander in A berühren. Ziehe MA, M'A, so ist $BC \cdot BD = BP \cdot BP'$,

Digitized by Google

weil D, C, P, P′ auf der nemlichen Kreisperipherie liegen. In Beziehung auf den Kreis K aber ist BC . BD = BA², weil BA Tangente an K ist; also ist auch BP . BP′ = BA²; folglich ist BA nicht Sekante, sondern Tangente von K′; also ist MA sowohl als M′A Perpendikel auf BA; folglich ist MAM′ eine gerade Linie und daher A gemeinschaftlicher Berührungspunkt beider Linien.

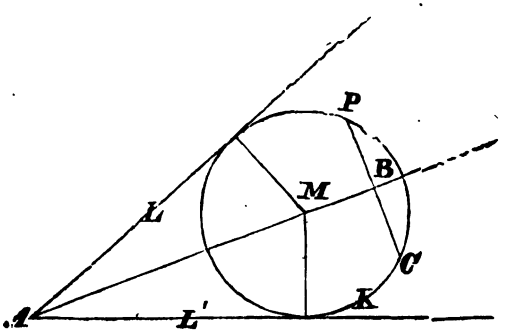
Zusatz 1. Die Konstruktion wird einfacher, wenn einer der beiden Punkte auf K liegt, oder wenn der auf PP′ errichtete Halbirungsperpendikel durch M geht.

Zusatz 2. Ein zweiter Kreis, der von K von Innen berührt wird, kann gefunden werden, wenn man von B die zweite Tangente an K führt und im Uebrigen wie oben verfährt. Die Konstruktion bleibt die nemliche, wenn P und P′ innerhalb K liegen; sie wird aber unmöglich, wenn der eine Punkt innerhalb, der andere außerhalb K liegt, oder wenn beide Punkte auf K liegen.

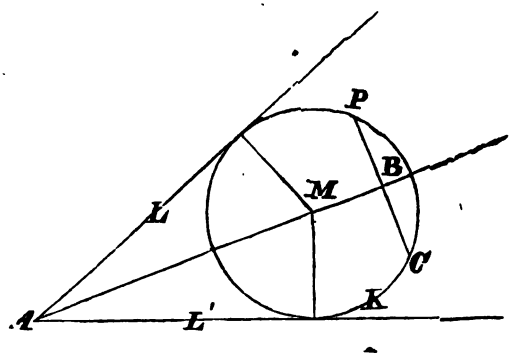
III. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt P geht und zwei gegebene gerade Linien L und L′ berührt.

Analysis. Es sei K der gesuchte Kreis und M sein Mittelpunkt; verlängere L und L′, bis sie sich in A schneiden, so ist A gegeben; ziehe MA, so wird dadurch der Winkel bei A halbirt; also ist AM der



Digitized by Google



Lage nach gegeben, folglich ist auch der von P auf AM oder dessen Verlängerung gefällte Perpendikel PB gegeben. Verlängere PB, bis es den Kreis K noch einmal in C trifft, so ist PC Chorde des Kreises und MB der vom Mittelpunkte M auf sie gefällte Perpendikel, also ist PC in B halbirt, oder BC ist = PB: also ist C gegeben; die Aufgabe ist daher auf die erste Aufgabe reduzirt: einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte P und C geht und eine gerade Linie L berührt.

Konstruktion und Beweis bleiben hier und bei den folgenden Berührungsaufgaben dem Schüler überlassen.

Zusatz 1. Da zwei Kreise gefunden werden können, welche durch P und C gehen und L berühren, so gibt es auch zwei Kreise, welche durch P gehen und L und L' berühren. Wenn jedoch zufällig P auf der Halbirungslinie des bei A entstandenen Winkels liegt, so ist obige Analysis nebst der daraus sich ergebenden Konstruktion nicht möglich. Für diesen Fall würde sich aber durch einen in P auf der Halbirungslinie errichteten Perpendikel, welcher, wie sich leicht nachweisen läßt, Tangente an den gesuchten Kreis werden muß, die Aufgabe leicht auf die frühere reduziren lassen: einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene gerade Linien berührt.

Zusatz 2. Wenn L und L' parallel sind, so liegt der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf den zwischen L und L' liegenden und von beiden gleichweit entfernten Parallelen. In diesem Falle darf P nicht außerhalb der Parallelen liegen, wenn die Aufgabe möglich sein soll. Wenn dagegen in der Figur zu unserer Aufgabe P außerhalb des Winkels bei

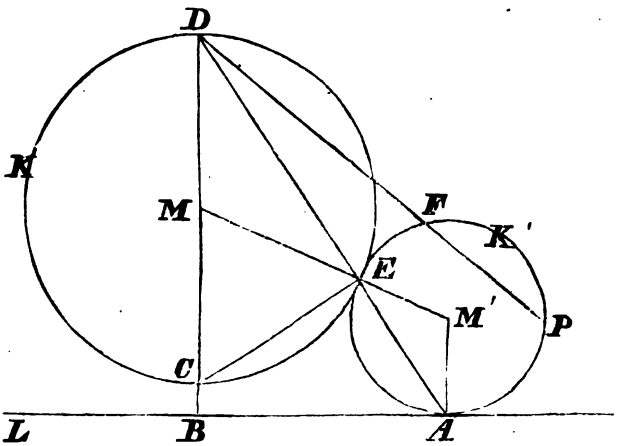
Digitized by Google

A liegen sollte, so würde der gesuchte Kreis in den Nebenwinkel oder Scheitelwinkel dieses Winkels fallen, die Lösung aber wäre immer möglich. Einfacher wird die Konstruktion, wenn P auf L oder L' liegt.

IV. Aufgabe.

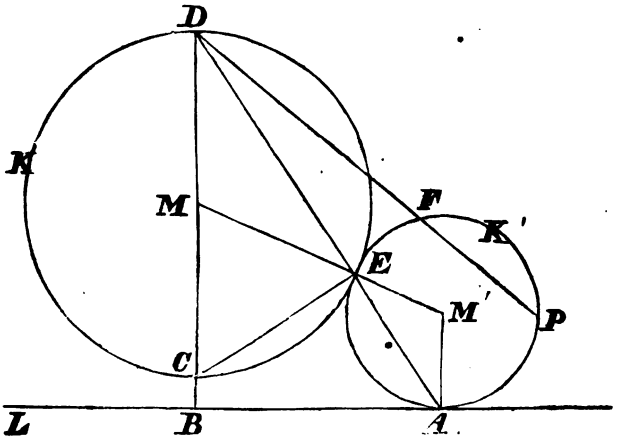
Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt P geht und eine gegebene gerade Linie L und einen gegebenen Kreis K berührt.

Analysis. Es sei K' der gesuchte Kreis und M der



Mittelpunkt des gegebenen, M' der des gesuchten Kreises; fälle von M' auf L den Perpendikel M'A, so ist A der Berührungspunkt von K' und L; fälle von M ebenfalls auf L den Perpendikel MB, welcher den Kreis K in C und verlängert noch einmal in D schneide; ziehe ferner MM', welches durch den Berührungspunkt E beider Kreise gehen wird und endlich ziehe DE, AE, CE. Da DM ∥ M'A ist, so ist DME = EM'A; ferner ist △ DME gleichschenklig und ebenso △ EM'A; daher sind in den Dreiecken DME und E'MA auch die Winkel an der Grundlinie gleich, oder DEM = AEM'; mithin, da MEM' eine gerade Linie ist, so ist auch DEA eine gerade Linie; daher ist,

Digitized by Google



wenn DP gezogen wird, welches K′ in F schneide, DE . DA = DF . DP. Nun ist aber BCEA ein Kreisviereck, weil DEC = DBA = 90° = CEA ist; mithin ist DE . DA = DC . DB; daher ist auch DC . DB = DF. DP. Folglich liegen die Punkte B, C, F, P auf der Peripherie eines Kreises. Nun ist M und L, also der Perpendikel MB, also B, C und D gegeben; folglich ist auch DP gegeben; folglich auch der Durchschnitt F des durch B, C und P beschriebenen Kreises mit DP; die Aufgabe ist daher reduzirt auf die erste oder zweite Aufgabe: einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei Punkte P und F geht und entweder die gerade Linie L oder den Kreis K berührt, woraus sich Konstruktion und Beweis leicht ableiten lassen.

Zusatz 1. Da sich zwei Kreise beschreiben lassen, welche durch P und F gehen und L berühren, so gibt es auch zwei Kreise, welche der gegebenen Aufgabe Genüge leisten und welche beide K von Außen berühren werden. Eine ähnliche Analysis wie oben läßt sich aber auch unter der Voraussetzung bilden, daß zwischen K′ und K eine Berührung von Innen stattfinde; aus ihr würde sich ergeben, daß zur Bestimmung des Punktes F nicht durch B, C und P, sondern durch B, D und P ein Kreis beschrieben werden müsse, durch dessen Durchschnitt mit CP der Punkt F bestimmt werde.

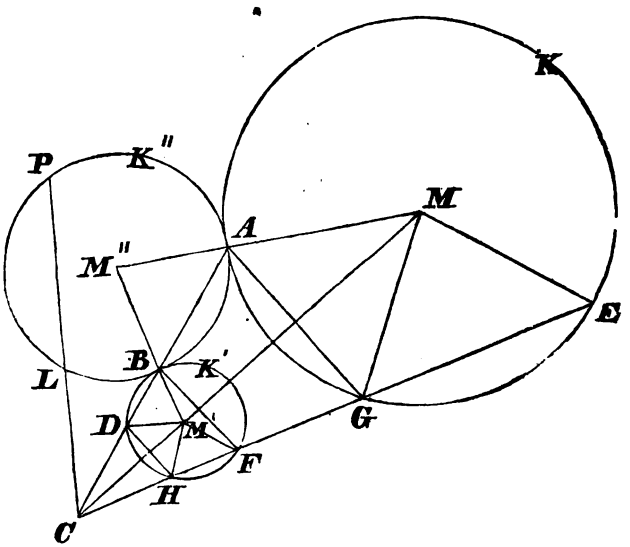
Digitized by Google

Für diesen Fall gibt es wieder zwei Kreise, welche durch P und F gehen und L berühren. Folglich gibt es im Ganzen 4 Kreise, welche durch P gehen und L und K berühren.

Zusatz 2. Die Aufgabe wird einfacher, wenn P auf L oder auf K liegt. Sie ist jedoch unmöglich, wenn P und K auf verschiedenen Seiten von L liegen, oder wenn P innerhalb, L aber außerhalb K liegt.

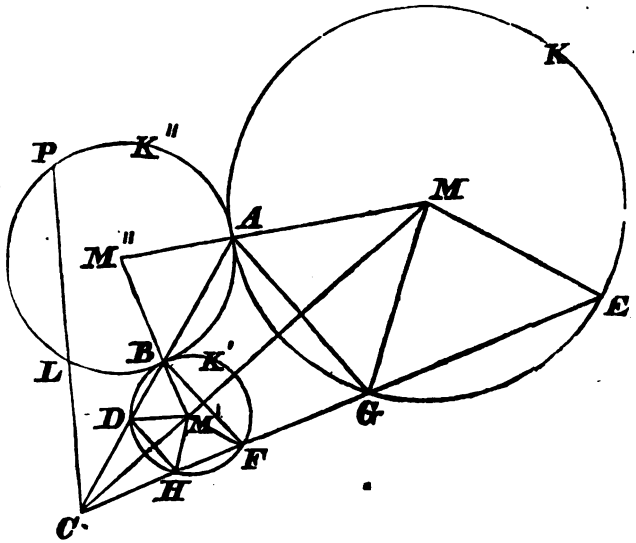
V. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt P geht und zwei gegebene Kreise K und K′ berührt.



Analysis. Es sei K″ der gesuchte Kreis und M, M′, M″ seien beziehungsweise die Mittelpunkte der drei Kreise K, K′, K″; ziehe MM′, MM″, M′M″, so gehen MM″ und M′M″ durch die Berührungspunkte A und B des Kreises K″ mit K und K′; ziehe AB und verlängere es, bis es die Verlängerung von MM′ in C schneide; AC schneide ferner den Kreis K′ noch

Digitized by Google



einmal in D, ziehe M'D, so ist ABM'' = M'BD; da nun aber wieder △ ABM'' sowohl als △ BDM' gleichschenklig ist, so ist auch BAM'' = BDM', also ist M''M ∥ M'D und daher MA : M'D = MC : M'C, daher ist das Verhältniß von MC : M'C gegeben; da nun auch MM' gegeben ist, so ist C gegeben und wird am einfachsten gefunden, wenn man zwei beliebige Halbmesser ME, M'F einander parallel und hierauf EF zieht und letzteres verlängert, bis es die Verlängerung von MM' in C trifft. Es schneide nun EC die Kreise K und K' noch einmal in G und H, wobei sowohl die willkürlich gewählten Punkte E und F, als auch die durch jene bestimmten G und H als gegeben betrachtet werden können, so ist, wenn MG, M'H gezogen wird, ME ∥ M'F, also MEG = M'FH; aber MGE = MEG und M'HF = M'FH, also auch MGE = M'HF und daher MG ∥ M'H. Da nun auch MA ∥ M'D ist, so ist AMG = DM'H und daher auch, weil die Dreiecke MAG und M'DH gleichschenklig sind, MGA = M'HD; folglich ist auch EGA = FHD, also AG ∥ DH. Zieht man nun BF, so ist BDHF ein Kreisviereck; also DBF + DHF = 180°; aber

Digitized by Google

auch CHD + DHF = 180°, also ist DBF = CHD = CGA (weil AG ‖ DH ist). Nun ist CBF + ABF = 180°, also ist auch AGF + ABF = 180°; oder ABFG ist ein Kreisviereck. Denkt man sich nun den zu ABFG gehörigen Kreis beschrieben, so ist CF . CG = CB . CA. Zieht man aber CP, welches den Kreis K'' noch einmal in L schneide, so ist auch CB . CA = CL . CP; also ist CF . CG = CL . CP, oder die vier Punkte F, G, L, P liegen auf der Peripherie eines Kreises. Da nun die Punkte G, F, C, also auch CP als gegeben betrachtet werden können, so ist auch L gegeben und liegt auf dem Durchschnitte von CP mit dem durch die Punkte F, G, P beschriebenen Kreise. Die Aufgabe ist daher reduzirt auf die zweite Aufgabe: einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte P und L geht und einen gegebenen Kreis K berührt, woraus sich wieder sowohl die Konstruktion als der Beweis ableiten läßt.

Zusatz 1. Es gibt zwei Kreise, welche der letztern Aufgabe Genüge leisten. Zwei weitere Kreise erhält man durch eine ähnliche Analysis, bei welcher jedoch M'F nach der entgegengesetzten Seite des Kreises und ‖ ME erscheint, wenn nemlich K'' den einen Kreis von Außen, den andern von Innen berührt. Es gibt folglich 4 Kreise, welche durch P gehen und K und K' berühren, wobei (nach der Seite 9 angegebenen Bezeichnung) folgende 4 Arten von Berührungen vorkommen: 1) Ka, K'a 2) Ka, K'i 3) Ki, K'a 4) Ki, K'i.

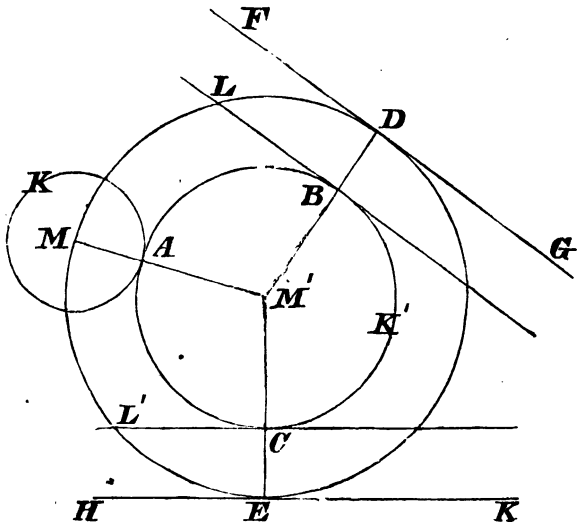
Zusatz 2. Analog den früheren Bemerkungen läßt sich leicht angeben, wann die Aufgabe einfacher und wann sie unmöglich wird.

VI. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene gerade Linien L und L' und einen gegebenen Kreis K berührt.

Digitized by Google

Analysis. Es sei K' der gesuchte Kreis und M und M' die Mittelpunkte der beiden Kreise K und K'. Ziehe MM', so geht dieses durch den gemeinschaftlichen Berührungspunkt A;



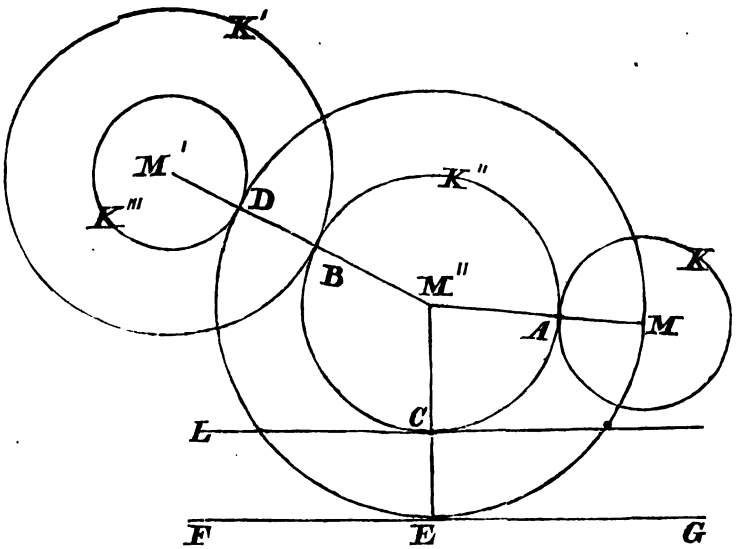
fälle ferner von M' auf L und L' die Perpendikel M'B und M'C, so sind B und C die Berührungspunkte und M'A = M'B = M'C. Verlängere M'B und M'C so nach D und E, daß BD = CE = MA wird, so ist M'D = M'E = M'M und ein mit M'M von M' als Mittelpunkt beschriebener Kreis geht also auch durch D und E und zwei durch D und E parallel mit L und L' gezogene gerade Linien FG und HK sind daher Tangenten an den letztern Kreis. Da nun L und L' und die Entfernungen der Parallelen FG und HK von L und L' gleich dem Halbmesser des gegebenen Kreises, mithin gegeben sind, so sind auch FG und HK gegeben. Die Aufgabe ist also reduzirt auf die dritte Aufgabe: einen Kreis zu beschreiben, der durch den Punkt M geht, und die geraden Linien FG und HK berührt. Ist dadurch der Kreis DME gefunden, so ist der gesuchte Kreis konzentrisch mit demselben und sein Halbmesser kleiner als der des Kreises DME um den Halbmesser des gegebenen Kreises, woraus sich Konstruktion und Beweis ergeben.

Digitized by Google

Zusatz. Es gibt zwei Kreise, die durch M gehen und FG und HK berühren. Eine ähnliche Analysis führt, wenn K und K' einander von Innen berühren, auf zwei Linien FG und HK, die ebenfalls um den Halbmesser des Kreises K von L und L' entfernt sind, aber auf der entgegengesetzten Seite, also gegen M hin liegen, was auf zwei weitere Kreise führt. Im Ganzen leisten also 4 Kreise der Aufgabe Genüge.

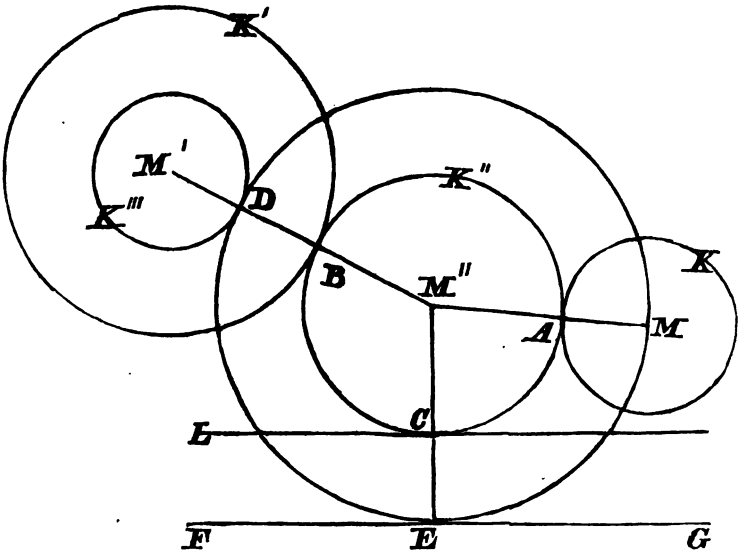
VII. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene gerade Linie L und zwei gegebene Kreise K und K' berührt.



Analysis. Es sei K'' der gesuchte Kreis, und M, M', M'' seien die Mittelpunkte der Kreise K, K', K''. Ziehe M''M und M''M', so gehen diese durch die Berührungspunkte A und B; fälle ferner von M'' auf L den Perpendikel M''C, so ist C Berührungspunkt der Linie L und es ist M''A = M''B = M''C. Verlängere M''B und M''C so nach D und E, daß BD = CE

Digitized by Google



= MA wird, so ist M''M = M''D = M''E und ein von M'' als Mittelpunkt mit M''M als Halbmesser beschriebener Kreis geht auch durch D und E und berührt einen von M' als Mittelpunkt mit M'D als Halbmesser beschriebenen Kreis K''', sowie eine durch E parallel mit L gezogene gerade Linie FG. Da nun M'D = M'B—DB = M'B—MA, d. h. gleich der Differenz der Halbmesser beider gegebenen Kreise K und K' ist, so ist Kreis K''' gegeben; da ferner L und die Entfernung der Parallele FG von L gegeben, nemlich gleich dem Halbmesser des Kreises K ist, so ist auch FG gegeben. Die Aufgabe ist also reduzirt auf die vierte Aufgabe: einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt M geht, eine gegebene gerade Linie FG und einen gegebenen Kreis K''' berührt. Ist dadurch der Kreis DME gefunden, so ist der gesuchte Kreis dadurch bestimmt, daß er dem Kreise DME konzentrisch ist und daß er einen um den Halbmesser des Kreises K kleineren Halbmesser hat, woraus sich Konstruktion und Beweis ableiten lassen.

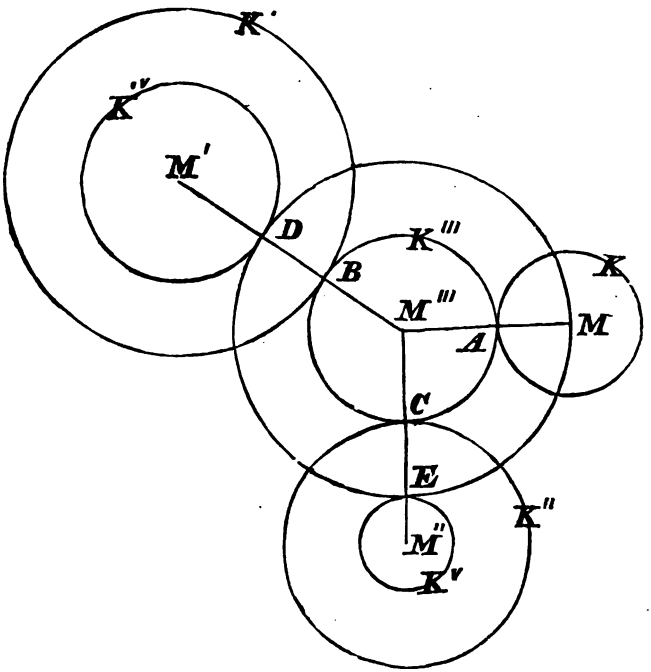
Zusatz. Nach dem Zusatze zu der vierten Aufgabe gibt es 4 Kreise, welche durch M gehen und FG und K''' be-

Digitized by Google

rühren. Da nun aber auch FG auf der entgegengesetzten Seite von L liegen kann, oder, was auf das Nemliche führt, da der Halbmesser des Kreises K''' gleich der Summe der Halbmesser beider Kreise K und K' statt gleich ihrer Differenz werden kann, wodurch 4 weitere Kreise bestimmt werden, so gibt es im Ganzen 8 Kreise, welche L, K und K' berühren.

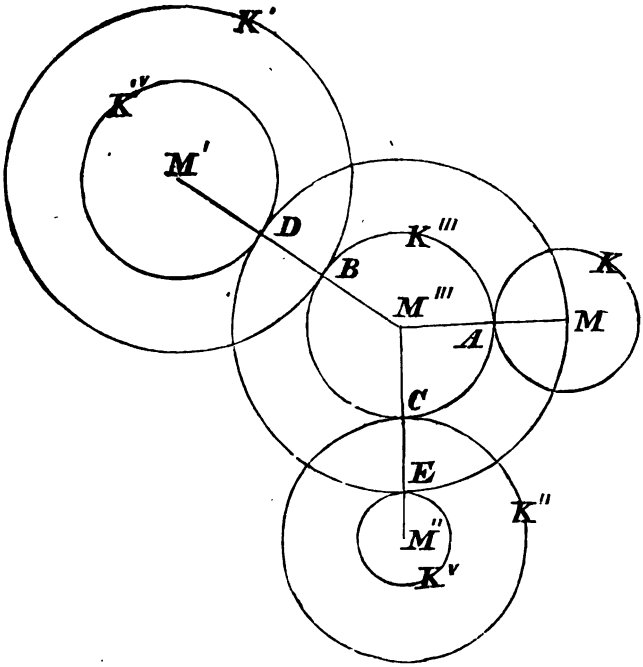
VIII. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise K, K', K'' berührt.



Analysis. Es sei K''' der gesuchte Kreis und M, M', M'', M''' die Mittelpunkte der Kreise K, K', K'', K''', so werden wieder durch M'''M, M'''M', M'''M'' die Berührungspunkte A, B, C bestimmt, und wenn wieder BD = CE = MA gemacht werden, so ist M'''D = M'''E = M'''M, und ein mit

Digitized by Google



letzterer Linie als Halbmesser von M''' als Mittelpunkt beschriebener Kreis geht daher auch durch D und E und berührt die mit K' und K'' konzentrischen Kreise K^{IV} und K_{V}, deren Halbmesser M'D und M''E gegeben sind, da M'D gleich der Differenz der Halbmesser von K' und K, M''E aber gleich der Differenz der Halbmesser von K'' und K ist. Daher ist K^{IV} und K^{V} gegeben und die Aufgabe ist auf die fünfte zurückgeführt: einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt M geht und zwei gegebene Kreise K^{IV} und K^{V} berührt. Aus dem Kreise DME ist hierauf leicht der gesuchte Kreis K''' abzuleiten, da derselbe dem ersten konzentrisch ist und einen um den Halbmesser des Kreises K kleineren Halbmesser hat. Konstruktion und Beweis ergeben sich leicht daraus.

Zusatz. Nach dem Zusatze zur fünften Aufgabe gibt es 4 Kreise, welche durch M gehen und K^{IV} und K^{V} berühren.

Digitized by Google

Nun können aber die Kreise K^{IV} und K^{V} auch dadurch bestimmt werden, daß die Summe der Halbmesser von K und K' für K^{IV} und die Summe der Halbmesser von K und K'' für K^{V} statt der Differenz dieser Halbmesser gewählt werden, wodurch 4 weitere Kreise bestimmt sind. Es gibt also im Ganzen 8 Kreise, welche K, K' und K'' berühren. Vergl. darüber auch Seite 9.

Die bisherigen Aufgaben sind nicht bloß wegen ihrer Reduktionen auf einander interessant, sondern auch deßwegen wichtig, weil sich auf sie wieder eine Menge anderer Aufgaben reduziren lassen. Als Beispiele davon mögen noch folgende drei Aufgaben dienen:

1) Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen geraden Linie L liegt, der durch einen gegebenen Punkt P geht und einen gegebenen Kreis K berührt.

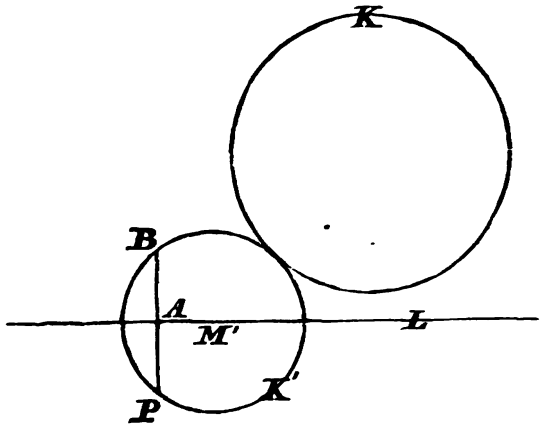
2) Auf einer gegebenen geraden Linie L einen Punkt zu finden, der die Eigenschaft hat, daß die Summe oder die Differenz der beiden von ihm nach zwei gegebenen Punkten P und P' gezogenen geraden Linien einer gegebenen geraden Linie a gleich sei.

3) Ein Kreis K und zwei Punkte P und P' sind gegeben; auf K einen Punkt zu finden, der die Eigenschaft hat, daß, wenn man von ihm nach P und P' gerade Linien zieht, dieselben den Kreis noch einmal in zwei Punkten so schneiden, daß die Verbindungslinie dieser Schneidungspunkte der Verbindungslinie von P und P' parallel wird.

Wir geben im Folgenden nur die Analysis dieser drei Aufgaben und überlassen es dem Schüler, daraus Konstruktion und Beweis abzuleiten.

Digitized by Google

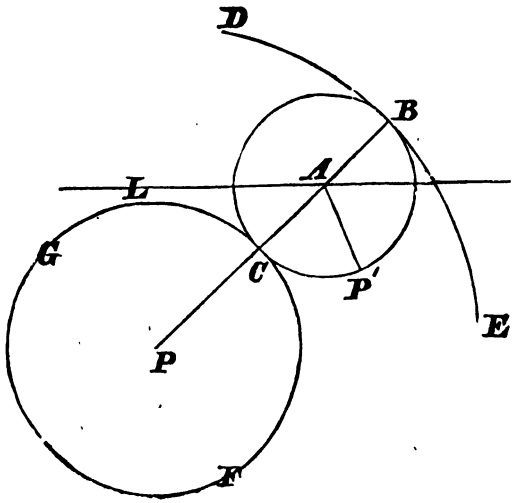
Analysis zur ersten Aufgabe. Es sei K′ der gesuchte Kreis, dessen Mittelpunkt M′ auf L liege und der durch P gehe und K berühre. Fälle von P auf A den Perpendikel PA und verlängere ihn bis er den Kreis K′ noch einmal in B trifft, so ist BP in A halbirt, weil M′A auf BP senkrecht steht; also ist AB = PA. Da nun P und L gegeben ist, so ist auch PA gegeben, also ist auch AB = PA gegeben; folglich ist der Punkt B gegeben und die Aufgabe ist also auf die zweite Berührungsaufgabe zurückgeführt: einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte P und B geht und einen Kreis K berührt.



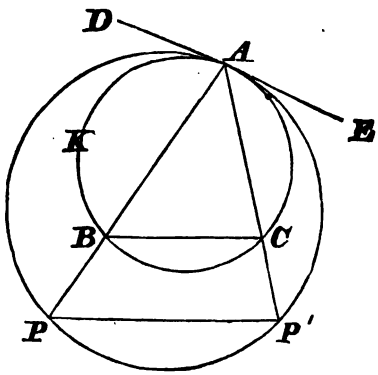
Analysis zur zweiten Aufgabe. Es sei A der gesuchte Punkt auf L, der die Eigenschaft habe, daß entweder AP + AP′ = a, oder AP − AP′ = a sei. Verlängere für den ersten Fall AP so über A nach B, daß AB = AP′ ist, so ist PB = AP + AP′ = a, also ist PB der Größe nach gegeben und B liegt daher auf dem von P als Mittelpunkt mit a als Halbmesser beschriebenen Kreise DBE. Schneide ebenso für den zweiten Fall AC = AP′ von AP ab, so ist PC = AP − AP′ = a und C liegt daher auf dem von P als Mittelpunkt mit a als Halbmesser beschriebenen Kreise CFG. Da nun sowohl P als a gegeben ist, so ist in beiden Fällen der Kreis DBE oder der Kreis CFG gegeben. Beschreibt man nun von A als Mittelpunkt mit AP′ als Halbmesser einen Kreis,

Digitized by Google

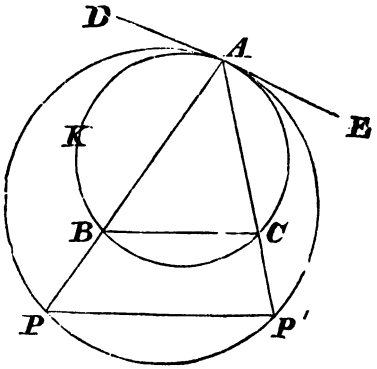
der durch B oder C gehen wird, so berührt dieser Kreis im ersten Falle den Kreis DBE in B von Innen, im zweiten den Kreis CFG in C von Außen, weil sowohl P, A und B, als auch P, A und C in einer geraden Linie liegen. Die Aufgabe ist also auf die vorige reduzirt: einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt auf der gegebenen geraden Linie L liegt, der durch den gegebenen Punkt P′ geht und im ersten Falle den gegebenen Kreis DBE von Innen, im zweiten den gegebenen Kreis CFG von Außen berührt. Dadurch aber ist sie nach dem Vorigen auf die zweite Berührungsaufgabe zurückgeführt.



Analysis zur dritten Aufgabe. Es sei A der gesuchte Punkt, der die Eigenschaft habe, daß, wenn AP, AP′ und PP′ gezogen werden, AP und AP′ den Kreis K so in zwei Punkten B und C schneiden, daß, wenn BC gezogen wird, BC ∥ PP′ sei. Denkt man sich an K in A die Tangente DE gezogen, so ist DAB = ACB, und EAC



Digitized by Google



= ABC, weil DE Tangente, AB und AC aber Chorden nnd ACB, ABC Peripheriewinkel sind. Nun ist aber BC ‖ PP′; also ist auch DAP = AP′P und EAP′ = APP′. Die Tangente DE hat also gegen das Dreieck APP′ dieselbe Lage wie gegen das Dreieck ABC. Beschreibt man also durch die drei Punkte A, P, P′ einen zweiten Kreis, so ist DE ebenfalls Tangente des letztern. Daher haben beide Kreise in A eine gemeinschaftliche Tangente und berühren sich folglich in dem gesuchten Punkte A. Die Aufgabe ist also auf die zweite Berührungsaufgabe zurückgeführt: einen Kreis zu beschreiben, der durch die beiden gegebenen Punkte P und P′ geht und den gegebenen Kreis K berührt. Da es nach dem Früheren zwei solche Kreise gibt, so wird es auch auf K zwei Punkte geben, welche der Aufgabe Genüge leisten.

---

§. 4.

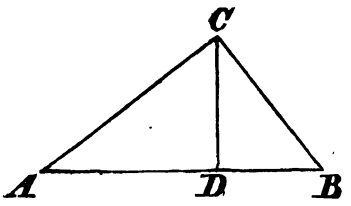
Die Auflösung der Aufgaben durch Lehrsätze.

Wenn im Bisherigen gezeigt worden ist, wie man eine gegebene Aufgabe dadurch lösen kann, daß man sie mit einer schon gelösten Aufgabe in irgend eine Verbindung setzt, entweder daß man sie nach dem vorigen Paragraphen auf jene reduzirt, oder daß man nach dem vorletzten Paragraphen eine Analogie zwischen beiden Aufgaben erkennt, so ist das Folgende dazu bestimmt, nachzuweisen, wie Aufgaben zu behandeln sind, bei denen zunächst weder Reduktionen noch Analogien aufgefunden werden können. Hier gibt es nun vor Allem eine

Digitized by Google

große Zahl von Lehrsätzen, welche unmittelbar ihre Anwendung für die Lösung von Aufgaben finden, und die letztere wird daher häufig demjenigen leicht, dem der darauf bezügliche Lehrsatz bekannt ist, während ein anderer nicht selten die größten Schwierigkeiten bei der Lösung findet. Es ergibt sich daraus von selbst, daß zur Erreichung einer Gewandheit in der Lösung geometrischer Aufgaben vor Allem möglichst umfassende Kenntniß der Theorie der ebenen Geometrie erforderlich ist. Dagegen hat auch umgekehrt häufig die Analysis einer Aufgabe, welche unmittelbar die Anwendung eines Lehrsatzes enthält, denjenigen, dem dieser Lehrsatz unbekannt war, zur Auffindung desselben geführt. Ein Beispiel wird dieß deutlich machen. Wem der Seite 4 ausgesprochene Lehrsatz bekannt ist, dem wird es auch leicht werden, für die auf derselben Seite behandelte Aufgabe die Auflösung zu finden; denn wenn er weiß, daß in jedem rechtwinkligen Dreiecke, in welchem durch den Höhenperpendikel die Hypotenuse stetig proportionirt geschnitten wird, die kleinere Kathete gleich dem größern dieser Kathete nicht anliegenden Segmente der Hypotenuse ist, so bedarf er für die Aufgabe: ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, dessen Hypotenuse gegeben ist und bei welchem eine Kathete gleich dem ihr nicht anliegenden Segmente der Hypotenuse sein soll, kaum eine Analysis, um die Lösung zu finden; es ergibt sich ihm aus dem genannten Lehrsatze unmittelbar, daß er die gegebene Hypotenuse stetig proportionirt schneiden muß, um den Fußpunkt des Höhenperpendikels zu erhalten, so daß alsdann nichts mehr übrig bleibt, als über der Hypotenuse einen Halbkreis zu beschreiben und in dem erhaltenen Durchschnittspunkte auf der Hypotenuse einen Perpendikel zu errichten, welcher durch seinen Durchschnitt mit dem Halbkreise die Spitze des rechtwinkligen Dreiecks bestimmen wird. Wem nun aber der genannte Lehrsatz nicht bekannt ist — und dieß werden wohl viele sein, welche die damit zusammenhängende Aufgabe lösen wollen, da derselbe nur selten in den gewöhnlichen Lehrbüchern erwähnt wird —, dem bleibt natürlich nichts übrig, als ohne solche Voraussetzungen eine Analysis der Aufgabe zu versuchen. Sie wird ihm nicht gerade schwierig werden. Es sei ABC das gesuchte recht-

Digitized by Google



winklige Dreieck, welches die Eigenschaft habe, daß der von C auf AB gefällte Perpendikel CD ein Segment AD abschneide, welches der Kathete BC gleich sei. Nach bekannten Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks ist $BC^2 = AB \cdot BD$; da nun $BC = AD$ werden soll, so muß auch $AD^2 = AB \cdot BD$, oder $AB : AD = AD : BD$ sein, woraus sich ergibt, daß AB in D stetig proportionirt geschnitten ist. Da nun AB gegeben ist, so ist auch D gegeben; folglich ist die Lage des Perpendikels CD gegeben; nun ist aber $ACB = 90^0$, folglich liegt C auf dem über AB als Durchmesser beschriebenen Halbkreise; also liegt C auf dem Durchschnitte des genannten Perpendikels mit diesem Halbkreise und ist daher gegeben. Der Auflöser ist dadurch nicht blos auf die Seite 4 angegebene Konstruktion der gegebenen Aufgabe gekommen, sondern er hat auch zugleich den Seite 4 unten erwähnten Lehrsatz entdeckt.

Zwar wird, die Sache genau betrachtet, jede Aufgabe durch Lehrsätze gelöst, da ihre Auflösung auf geometrischen Wahrheiten beruht, welche in Lehrsätzen ausgesprochen sind. Man versteht aber unter der Auflösung durch Lehrsätze insbesondere eine solche Auflösung geometrischer Aufgaben, welche eine unmittelbare Folge eines geometrischen Lehrsatzes ist, namentlich wenn dieser Lehrsatz nicht gerade zu den in allen Lehrbüchern der ebenen Geometrie vorkommenden, also gleichsam das Fundament oder Gerippe der Wissenschaft bildenden Lehrsätzen gehört.

Bestimmte Regeln über die Analysis durch Lehrsätze können weniger gegeben werden, als in den vorangegangenen Fällen, da, wie aus dem Gesagten sich ergibt, die Anwendung des Lehrsatzes stets eine unmittelbare ist, die nur dem möglich ist, der den Lehrsatz kennt. Einige Beispiele aber werden die Verhältnisse, welche hier stattfinden, noch weiter aufklären.

Schon die Seite 33 behandelte Aufgabe, ein Dreieck zu konstruiren, von welchem die drei Mittellinien gegeben sind, war

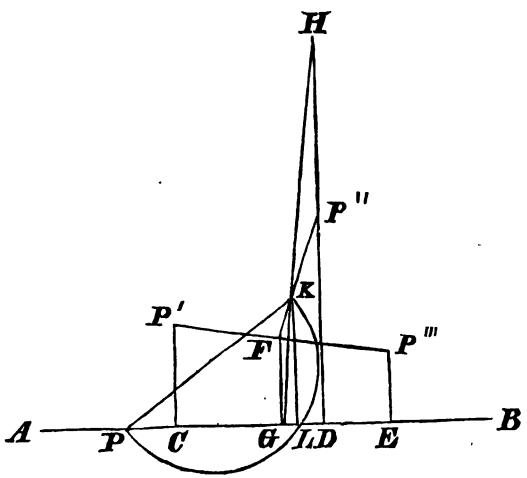
Digitized by Google

nur für denjenigen lösbar, welchem die Lehrsätze bekannt sind, daß sich die drei Mittellinien eines Dreiecks in einem einzigen Punkte schneiden und daß jede Mittellinie von den beiden andern so getheilt wird, daß das zwischen dem gemeinschaftlichen Durchschnitte und der Seite liegende Stück ein Drittheil, das zwischen jenem Durchschnitt und der Winkelspitze liegende Stück aber zwei Drittheile der ganzen Mittellinie beträgt.

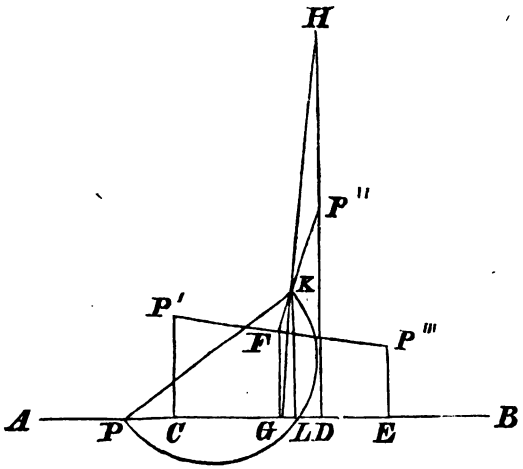
Es sei nun die weitere Aufgabe gegeben: durch einen gegebenen Punkt P eine gerade Linie so hindurchzuziehen, daß die Summe der von drei andern gegebenen Punkten P′, P″, P‴ auf sie gefällten Perpendikel von gegebener Größe = a sei.

Wer nur mit den gewöhnlichen Lehrsätzen der ebenen Geometrie, ich möchte sagen, mit den Fundamentallehrsätzen derselben bekannt ist, wird die genannte Aufgabe etwa auf folgende Art behandeln.

Analysis. Es sei AB die gesuchte durch P gehende gerade Linie, welche die Eigenschaft habe, daß, wenn von P′, P″, P‴ auf sie die Perpendikel P′C, P″D, P‴E gefällt werden, P′C + P″D + P‴E = a sei. Ziehe P′P‴, so ist P′CEP‴ ein Trapez, in welchem P′C, P‴E die beiden parallelen Seiten sind. Nach einem allbekannten Lehrsatze ist in einem Trapeze die Verbindungs-



Digitized by Google



linie der Halbirungspunkte beider nichtparallelen Seiten halb so groß als die Summe beider parallelen Seiten; halbirt man also P'P''' in F und CE in G und zieht FG, so ist FG = $^1/_2$ (P'C + P'''E) und zugleich ist FG ‖ P'C, also auch senkrecht auf AB. Verlängert man nun DP'' über P'' so nach H, daß HP'' = 2FG wird, so ist HP'' = P'C + P'''E, also DH = P'C + P'''E + P'D = a. Zieht man nun GH und FP'', so ist △ HKP'' ∽ △ FGK, weil HKP'' = FKG und KHP'' = FGK ist (da FG ‖ HD ist), daher ist auch KP'' : FK = HK : GK = HP'' : FG; aber HP'' = 2FG, also ist auch KP'' = 2FK und HK = 2GK, oder FK = $^1/_3$FP'' und GK = $^1/_3$GH; nun ist P' und P''' also P'P''', folglich auch sein Halbirungspunkt F gegeben; folglich, da P'' gegeben ist, so ist auch FP'' gegeben; da nun FK = $^1/_3$FP'' gegeben ist, so ist auch K gegeben. Fällt man nun von K auf AB den Perpendikel KL, so ist auch △ HGD ∽ △ KGL, also HD : KL = GH : GK, folglich da GK = $^1/_3$GH ist, so ist auch KL = $^1/_3$HD = $^1/_3$a; also ist KL der Größe nach gegeben. Wenn nun PK gezogen wird, welches gegeben ist, weil P und K gegeben sind, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke PKL die Hypotenuse PK und die Kathete KL bekannt, folglich kann dieses Dreieck konstruirt werden; folglich ist L, also PL oder AB gegeben.

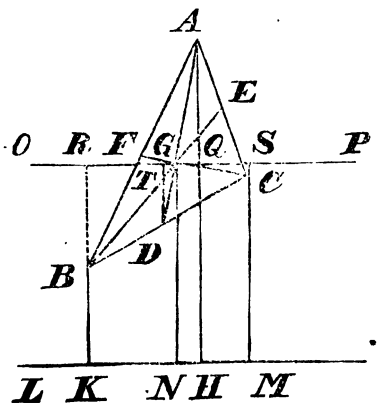
Digitized by Google

Konstruktion. Ziehe $P'P'''$, halbire es in F und ziehe $P''F$, theile es in K so, daß $FK = \frac{1}{3}P''F$ ist und ziehe PK; über PK als Durchmesser beschreibe einen Halbkreis und lege in denselben von K aus eine Chorde $KL = \frac{1}{3}a$ und ziehe PL, so ist PL oder AB die gesuchte Linie.

Beweis. Fälle von P', P'', P''' und F auf AB die Perpendikel $P'C$, $P''D$, $P'''E$ und FG, welche sämmtlich parallel mit KL sein werden, da $PLK = 90^0$, also KL auf AB senkrecht steht; ziehe GK und verlängere es, bis es die Verlängerung von DP'' in H trifft. Da $FG \parallel HD$ ist, so ist $\triangle FGK \sim \triangle HKP''$ und daher $GK : HK = FG : HP'' = FK : KP''$; aber $FK = \frac{1}{3}P''F$, also $FK = \frac{1}{2}KP''$ und daher auch $FG = \frac{1}{2}HP''$ und $GK = \frac{1}{2}HK$. Nun ist auch $FG = \frac{1}{2}(P'C + P'''E)$, weil $P'P'''$ in F halbirt und $FG \parallel P'C \parallel P'''E$ ist; daher ist $\frac{1}{2}HP'' = \frac{1}{2}(P'C + P'''E)$, folglich $HP'' = P'C + P'''E$ und daher $P'C + P'''E + P''D = HD$. Nun ist $\triangle GKL \sim \triangle GHD$, weil $KL \parallel HD$ ist; daher ist $GK : GH = KL : HD$; aber $HK = 2GK$, also $GH = 3GK$; folglich ist auch $HD = 3KL = 3 \cdot \frac{1}{3}a = a$; daher ist auch $P'C + P'''E + P''D = a$.

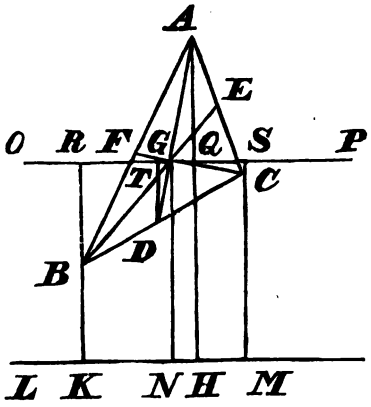
Dieser ganze Gang der Analysis u. s. w., den vielleicht mancher erst nach langem Suchen finden wird, ist jedoch überflüssig für den, welcher die Lehre von den Mittellinien in einem Dreiecke genauer kennt, welchem daher außer den Seite 149 erwähnten Sätzen über die Mittellinien noch folgender weitere Satz über dieselben bekannt ist:

Wenn man in der Ebene eines Dreiecks ABC und zwar außerhalb desselben eine beliebige gerade Linie L zieht und sowohl von den Winkelspitzen A, B, C, als auch von dem Durchschnittspunkte G der drei von diesen Winkelspitzen nach den Halbirungspunkten D, E, F der Gegenseiten gezogenen



Digitized by Google

Mittellinien auf die Linie L Perpendikel AH, BK, CM, GN fällt, so ist die Summe der drei von A, B und C gefällten Perpendikel dreimal so groß, als der von G gefällte, d. h. es ist AH + BK + CM = 3GN. Der Beweis dieses Satzes (vergl. mein Lehrbuch der ebenen Geometrie 13te Auflage, Anhang, IV. Abtheilung A Nr. 27, woselbst derselbe noch mehr verallgemeinert sich findet) ist wohl am kürzesten folgender:



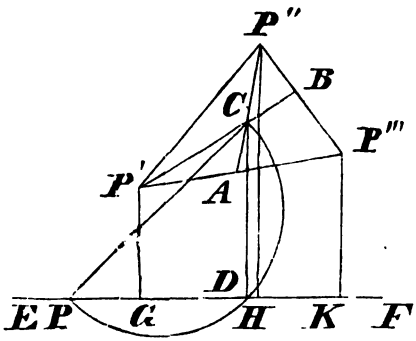
Ziehe durch G eine Parallele OP mit L, welche AH in Q und die Verlängerungen von BK und CM in R und S schneide, so ist RK = QH = SM = GN, weil OP ∥ L und die genannten Linien einander parallel sind; ziehe nun durch D eine Parallele DT mit AH, oder KR oder MS, so ist nach dem oben erwähnten Satze über die Mittellinien DG = $^1/_3$AD und AG = $^2/_3$AD, also AG = 2DG, aber △ AGQ ∽ △ DGT, weil DT ∥ AQ ist, also ist auch AQ = 2DT; nun ist DT ∥ BR und BC in D halbirt; in dem Trapeze BCSR ist daher BR + CS = 2DT, also ist BR + CS = AQ; folglich ist AH + BK + CM = AQ + QH + BK + CM = BR + CS + QH + BK + CM = RK + QH + SM = 3GN.

Auf die einfachste Weise nun ergibt sich aus dem so eben bewiesenen Lehrsatze folgende Konstruktion der obigen Aufgabe: Ziehe P′P″, P′P‴, P″P‴, halbire P′P‴ und P″P‴ in A und B und ziehe P″A, P′B, welche sich in C schneiden; ziehe PC und beschreibe über PC als Durchmesser einen Halbkreis; von C als Mittelpunkt lege CD = $^1/_3$a als Chorde in den Kreis, so ist PD oder EF die gesuchte Linie.

Beweis. Da P′P‴ und P″P‴ in A und B halbirt und P″A, P′B gezogen sind, so ist C der Durchschnittspunkt

Digitized by Google

der Mittellinien. Nun ist CDP = 90° als Winkel im Halbkreise, oder CD ist Perpendikel auf EF; fällt man daher von P′, P″, P‴ ebenfalls auf EF die Perpendikel P′G, P″H, P‴K,



so ist nach dem vorigen Lehrsatze P′G + P″H + P‴K = 3CD = 3 . $^1/_3$a = a.

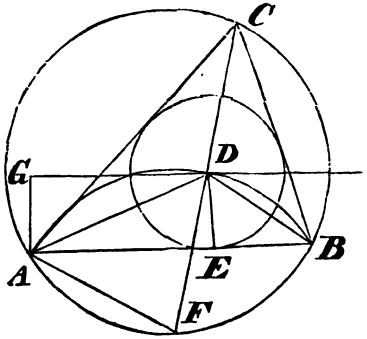
Genau betrachtet fällt die letztere Auflösung mit der oben Seite 149 durch die dortige Analysis gefundenen zusammen; denn der hier gefundene Punkt C ist identisch mit dem dort gefundenen Punkte K. Denkt man sich nemlich Seite 149 P′P″ und P″P‴ gezogen, so ist in △ P′P″P‴ die Linie P″F die zur Seite P′P‴ gehörige Mittellinie und da FK = $^1/_3$FP′ ist, so ist K der Durchschnittspunkt der Mittellinien. Der Punkt C in der letzten Auflösung aber ist einfacher bestimmt worden, als Seite 151 der Punkt K. Namentlich ist aber der Beweis hier viel einfacher als Seite 151, sowie die Konstruktion selbst sich unmittelbar aus dem Lehrsatze ergab.

Wenn sich auch nicht immer die ganze Analysis unmittelbar aus einem Lehrsatze ergibt, so ist dieß doch häufig wenigstens für einen, oft für den wichtigsten und schwierigsten Theil der Analysis der Fall. Auch dafür möge noch ein Beispiel gegeben werden in der Aufgabe: ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Seite = a, der gegenüberliegende Winkel = α und der Halbmesser des innern Berührungskreises = r.

Mit Hilfe der gewöhnlicheren Lehrsätze der ebenen Geometrie wird die Analysis wohl am leichtesten auf eine der zwei folgenden Auflösungen führen:

Digitized by Google

1. Auflösung.



Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, von welchem AB = a, ACB = α, und der Halbmesser des innern Berührungskreises = r gegeben sei; es sei D der Mittelpunkt dieses Kreises, und also, wenn von D auf AB der Perpendikel DE gefällt wird, DE = r. Da AB und der gegenüberliegende Winkel ACB gegeben sind, so ist der Kreisabschnitt ACB gegeben, auf welchem C liegen muß, es ist dieß nemlich der über AB als Chorde beschriebene Kreisabschnitt, welcher den Winkel α faßt. Zieht man ferner CD, AD, so werden dadurch die Winkel ACB, BAC halbirt, weil die Seiten des Dreiecks ABC den vom Mittelpunkt D mit dem Halbmesser DE beschriebenen Kreis berühren. Verlängert man daher CD, bis es die Ergänzung des Kreisabschnittes ACB in F trifft, so ist ACF = BCF, also AF = BF, oder F ist Halbirungspunkt des Bogens AFB, folglich da der Kreisabschnitt ACB, also auch seine Ergänzung AFB gegeben ist, so ist F gegeben. Zieht man nun AF, so ist BAF = BCF = $^1/_2$ACB, BAD = $^1/_2$BAC, also DAF = $^1/_2$ACB + $^1/_2$BAC; ebenso ist ADF = ACD + DAC (als Außenwinkel des Dreiecks ACD) = $^1/_2$ACB + $^1/_2$BAC; daher ist DAF = ADF, folglich AF = DF, oder D liegt auf dem von F als Mittelpunkt mit FA als Halbmesser beschriebenen Kreisbogen; da nun auch die Entfernung r des Punktes D von AB gegeben ist, so liegt D auch auf der in der genannten Entfernung gezogenen Parallele mit AB; also liegt D im Schneidungspunkte beider Linien; mithin ist D gegeben, folglich auch FD, also auch der Durchschnitt C seiner

Digitized by Google

Verlängerung mit dem Kreisabschnitt ACB, also ist △ ACB gegeben.*)

Konstruktion. Ueber AB = a beschreibe einen Kreisabschnitt, der einen Winkel = α faßt und ergänze denselben zum ganzen Kreise; halbire den Ergänzungsbogen in F, ziehe FA und beschreibe von F als Mittelpunkt mit FA als Halbmesser einen Kreisbogen; auf AB errichte in A einen Perpendikel AG = r und ziehe durch G eine Parallele mit AB, bis sie den letztern Kreisbogen in D trifft; ziehe FD und verlängere es, bis es den erstern Kreisabschnitt in C trifft; ziehe endlich AC und BC, so ist △ ABC das gesuchte.

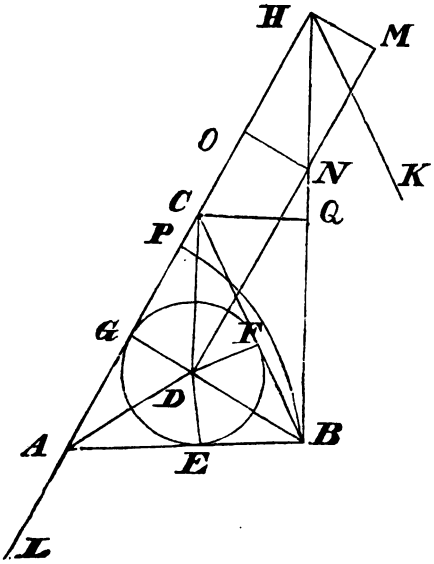
Beweis. AB = a, ACB = α als Peripheriewinkel in dem Kreisabschnitte ACB. Ziehe ferner AD und fälle von D auf AB den Perpendikel DE, so ist AF = BF, also ACF = BCF, oder ACB durch CF halbirt. Da ferner AF = DF ist, so ist FAD = ADF; aber ADF = ACD + CAD; also ist FAD = ACD + CAD, d. h. FAB + BAD = ACD + CAD; aber FAB = FCB = ACD; also auch BAD = CAD, oder BAC durch AD halbirt; da nun D der Durchschnitt der die Winkel halbirenden Linien CF und AD ist, so ist D Mittelpunkt, also DE Halbmesser des innern Berührungskreises und es ist DE = AG = r.

2. Auflösung.

Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, in welchem AB = a und ACB = α; es sei ferner D der Mittelpunkt

*) Aus der Analysis läßt sich folgender Lehrsatz ableiten: Wenn um ein gegebenes Dreieck ABC ein Kreis beschrieben wird und in dasselbe ebenso ein zweiter Kreis, so ist für einen Bogen AB des ersten Kreises der Halbirungspunkt F von den Endpunkten A und B seiner zugehörigen Chorde ebensoweit entfernt als vom Mittelpunkte D des zweiten Kreises. Die vorangegangene Bekanntschaft mit diesem Lehrsatze wäre für die obige Analysis eine bedeutende Abkürzung gewesen.

Digitized by Google



des innern Berührungskreises und daher, wenn von D auf die Seiten die Perpendikel DE, DF, DG gefällt werden, DE = DF = DG = r; ferner werden durch CD, AD, BD die Winkel des Dreiecks ABC halbirt; verlängere AC so nach H, daß CH = BC wird und ziehe BH, so ist ACB = CHB + CBH; aber CHB = CBH; folglich CHB = $^1/_2$ACB; also CHB = ACD, oder HB ∥ CD. Ferner ist CG = CF, AG = AE, BF = BE, also AC + BC = 2CG + AE + BE = 2CG + AB. Nun ist in △ CDG GD = r, DCG = $^1/_2$ACB = $^1/_2\alpha$ und CGD = 90° gegeben; also ist △ CDG, folglich CG, also auch 2CG und daher auch 2CG + AB = 2CG + a, oder AH gegeben. Die Aufgabe ist daher reduzirt auf die Aufgabe: ein Dreieck ABH zu konstruiren, von welchem zwei Seiten AB, AH und der einer dieser Seiten AB gegenüberliegende Winkel AHB = $^1/_2\alpha$ gegeben sind.

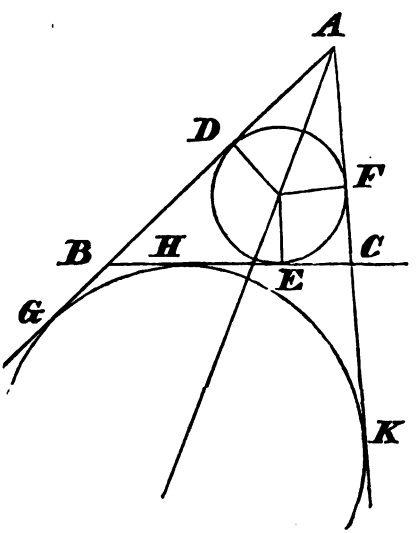
Konstruktion. An eine beliebige gerade Linie HL lege in einem beliebigen Punkte H einen Winkel LHK = α und halbire denselben; auf HL errichte in H einen Perpendikel HM = r und ziehe durch M eine Parallele mit HL, bis diese die Halbirungslinie in N trifft; von N fälle auf HL den Perpendikel NO und schneide auf der Verlängerung von HO zuerst OP = HO und hierauf PA = a ab; von A als Mittelpunkt beschreibe mit dem Halbmesser AP einen Kreisbogen, der die Halbirungslinie des Winkels AHK in B schneide; ziehe endlich AB und errichte auf HB im Halbirungspunkte Q einen Per-

Digitized by Google

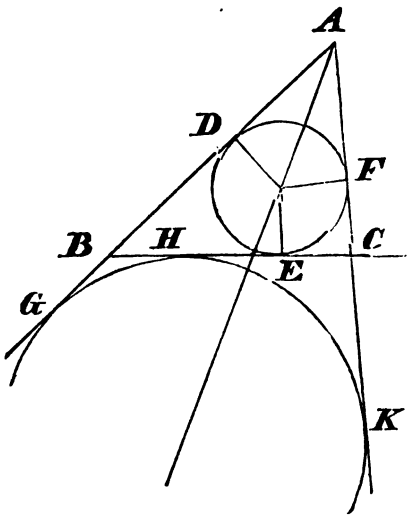
pendikel, welcher AH in C schneide, so ist, wenn BC gezogen wird, △ ABC das gesuchte.

Beweis. AB = AP = a; ferner ist HC = BC, weil C auf dem im Halbirungspunkte Q von BH errichteten Perpendikel liegt; daher ist CHB = CBH; aber CHB = BHK, also auch CBH = BHK und daher BC = HK; folglich ist ACB = AHK = α. Halbire ferner ACB und BAC so, daß sich die Halbirungslinien in D schneiden, so ist D der Mittelpunkt des innern Berührungskreises und daher, wenn von D auf die Seiten des Dreiecks ABC die Perpendikel DE, DF, DG gefällt werden, DG Halbmesser dieses Kreises und DE = DF = DG, CG = CF, AG = AE, BF = BE; also ist AG + BF = AE + BE = AB = AP; aber AC + BC = AC + HC = AH; daher ist CG + CF = HP, folglich, weil CG = CF ist, CG = $^1/_2$HP = HO; nun ist DGC = NOH = 90° und DCG = $^1/_2$ACB = $^1/_2$AHK = OHN; daher ist △ CDG ≅ △ HNO; folglich ist DG = NO = HM = r.

Eine dritte Konstruktion aber, deren Analysis sich leicht bilden läßt, ergibt sich aus folgendem weniger bekannten Lehrsatze: In jedem Dreiecke ABC ist die Entfernung eines Berührungspunktes D des innern Berührungskreises von dem auf der Verlängerung der nemlichen Seite liegenden Berührungspunkte G eines äußern Berührungskreises gleich der zwischen beiden Berührungskreisen liegenden Seite BC des Dreiecks.



Digitized by Google

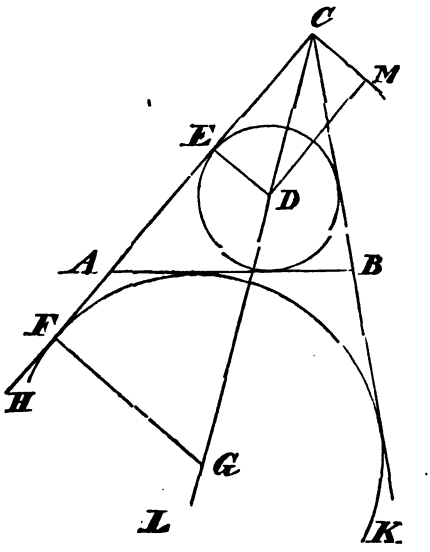


Beweis. Es seien D, E, F die Berührungspunkte des innern, G, H, K die des äußern Berührungskreises, so ist AG = AK, AD = AF, also DG = FK; aber BG = BH, CK = CH, BD = BE, CF = CE, folglich DG + FK = BH + BE + CH + CE = 2BC; folglich, weil DG = FK ist, so ist DG = BC.

Unmittelbar aus diesem Lehrsatze ergibt sich nun folgende

3. Auflösung.

Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, in welchem AB = a, ACB = α; es sei ferner D der Mittelpunkt des innern Berührungskreises, also der von D auf AC gefällte Perpendikel DE Halbmesser desselben und = r. D liegt auf der Halbirungslinie des Winkels ACB; nun ist ACB, also auch dessen Halbirungslinie gegeben; zugleich ist die Entfernung r des Punktes D von AC gegeben; also liegt D auch auf einer Parallele mit



Digitized by Google

AC in der Entfernung = r, folglich liegt D auf dem Durchschnitte dieser Parallele mit der genannten Halbirungslinie, also ist D gegeben, folglich auch der von D auf AC gefällte Perpendikel DE, also ist der Berührungspunkt E des innern Berührungskreises mit AC gegeben. Schneidet man nun von E aus auf AC und dessen Verlängerung EF = AB = a ab, so ist F gegeben; folglich da F Berührungspunkt des zu AB gehörigen äußern Berührungskreises ist, dessen Mittelpunkt G sowohl auf dem in F auf CF errichteten Perpendikel, als auch auf der Halbirungslinie des Winkels ACB liegt, so ist G gegeben; folglich da GF Halbmesser dieses Berührungskreises ist, so ist der Kreis selbst gegeben. Nun ist AB gemeinschaftliche Tangente beider Kreise; folglich ist die Aufgabe auf die bekannte Aufgabe reduzirt: an zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Konstruktion. Mache HCK = α und halbire es durch CL; auf HC errichte in C einen Perpendikel CM = r und ziehe durch M eine Parallele mit HC, bis sie CL in D trifft; von D fälle auf CH den Perpendikel DE und schneide auf der Verlängerung von CE ein Stück EF = a ab; auf CH errichte hierauf in F einen Perpendikel FG, welcher die Halbirungslinie CL in G treffe; von D und G als Mittelpunkten beschreibe endlich mit den Halbmessern DE und GF Kreise und ziehe an diese beiden Kreise nach einer bekannten Aufgabe eine gemeinschaftliche Tangente AB, so ist $\triangle$ ABC das gesuchte.

Beweis. Da D auf der Halbirungslinie CL des Winkels HCK ist, so berührt der von D als Mittelpunkt mit dem auf AC gefällten Perpendikel DE als Halbmesser beschriebene Kreis auch die Seite BC; da er aber nach der Konstruktion auch AB berührt, so ist er innerer Berührungskreis des Dreiecks ABC und sein Halbmesser ist DE = r; ferner ist ACB = α; endlich ist nach dem so eben bewiesenen Lehrsatze AB = EF = a.

Digitized by Google

§. 5.

Die Auflösung der Aufgaben durch Data.

Genau genommen fällt die Auflösung durch Data mit der Auflösung durch Lehrsätze zusammen. Unter Data aber versteht man eine besondere Art von Lehrsätzen, oder vielmehr einen Ausdruck mancher Lehrsätze in der besondern Form, daß durch den Lehrsatz ausdrücklich ausgesprochen wird, wenn bei einer Figur gewisse Stücke gegeben seien, so seien andere Stücke zugleich damit gegeben.*) Beispiele dieser Art sind uns schon Seite 19—23 vorgekommen. Die drei dort behandelten Lehrsätze können zunächst in folgender Form ausgesprochen werden:

1) Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel des einen und die Summe (oder Differenz) der ihn einschließenden Seiten gleich sind den entsprechenden Stücken des andern Dreiecks, so ist auch die Summe (oder Differenz) der zu diesen Seiten gehörigen Höhenperpendikel im ersten Dreiecke gleich der Summe (oder Differenz) der entsprechenden Perpendikel im zweiten.

2) Wenn in zwei Dreiecken sowohl die Halbirungslinie eines Winkels, als auch der von der Spitze dieses Winkels auf die Gegenseite gefällte Perpendikel des einen Dreiecks gleich sind den entsprechenden Stücken des andern, so ist auch die Differenz der beiden andern Winkel im ersten Dreiecke gleich der Differenz der beiden übrigen Winkel im zweiten.

3) Wenn in zwei Parallelogrammen der Flächeninhalt und die Differenz der Quadrate beider Diagonalen einander gleich sind, so sind die Parallelogramme gleichwinklig.

Dieselben Sätze — besonders wenn man berücksichtigt, daß sich von ihnen auch die Conversen analog den Seite 19 — 23 geführten Beweisen leicht beweisen lassen — gestatten aber auch folgende Ausdrucksweise:

---

*) Das Wort Data bezeichnet gegebene Größen und stammt von dem berühmten griechischen Mathematiker Euklid, welcher zum Zwecke der Lösung geometrischer Aufgaben eine eigene Schrift unter dem Titel: Dedomena (lateinisch: Data = Gegebenes) schrieb.

Digitized by Google

1) Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich einem Winkel, der Summe (oder Differenz) beider ihn einschließenden Seiten und der Summe (oder Differenz) der zu diesen Seiten gehörigen Höhenperpendikel zwei gegeben sind, so ist damit auch das dritte Stück gegeben.

2) Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich der Halbirungslinie eines Winkels, dem von demselben Winkel auf die Gegenseite gefällten Perpendikel und der Differenz beider andern Winkel zwei gegeben sind, so ist damit auch das dritte Stück gegeben.

3) Wenn in einem Parallelogramme von folgenden drei Stücken, nemlich einem Winkel, dem Flächeninhalte und der Differenz der Quadrate beider Diagonalen zwei gegeben sind, so ist damit auch das dritte Stück gegeben.

In letzterer Ausdrucksweise erscheinen die Lehrsätze als sogenannte Data, d. h. es ist in ihnen ausdrücklich ausgesprochen, daß mit gegebenen Stücken einer Figur auch andere von ihnen abhängige Stücke gegeben seien. Die Kenntniß dieser Data ist in doppelter Beziehung von Werth, einmal indem dieselben durch den Nachweis der Abhängigkeit irgend einer Bedingung von andern verhüten, daß nicht zur Lösung von Aufgaben solche Bedingungen gegeben werden, welche von einander abhängig sind, während doch nach den Seite 18 ff. gemachten Bemerkungen sämmtliche für die Bestimmtheit der Aufgabe erforderliche Bedingungen von einander unabhängig sein müssen. Ein zweiter Vortheil dieser Data ist, daß sie bei gegebenen Aufgaben die Analysis abkürzen, indem sie die gegebenen Bedingungen auf einfachere durch sie gegebene reduziren, welche Reduktion ohne Kenntniß des betreffenden Lehrsatzes über die Data durch die Analysis selbst oft erst gefunden werden müßte. So z. B., um die erwähnten drei Data anzuwenden, werden alle Dreiecksaufgaben, in welchen außer einem weitern dritten Stücke noch die Summe (oder Differenz) zweier Seiten und die Summe (oder Differenz) der beiden zu ihnen gehörigen Höhenperpendikel gegeben sind, reduzirt auf Aufgaben, bei welchen außer demselben dritten Stücke die Summe (oder Differenz) zweier Seiten und

Digitized by Google

der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Ebenso reduziren sich Aufgaben über Dreiecke mit den Bedingungen, daß die Halbirungslinie eines Winkels und die Differenz beider andern Winkel eine gegebene Größe haben sollen, auf Aufgaben, für welche die Halbirungslinie eines Winkels und der zur Gegenseite gehörige Höhenperpendikel gegeben sind. Endlich werden Parallelogrammaufgaben durch den dritten Satz dadurch vereinfacht, daß statt der Bedingungen, in dem Parallelogramme sollen der Flächeninhalt und die Differenz der Quadrate beider Diagonalen von gegebener Größe sein, die Bedingungen gesetzt werden dürfen, es sei der Flächeninhalt und ein Winkel gegeben.

Folgende Aufgaben werden dieß deutlich machen:

I. Aufgabe.

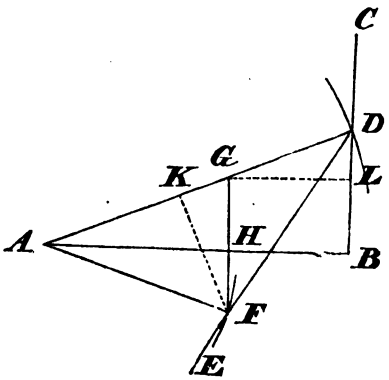
Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Seite = a, die Summe beider andern Seiten = b und die Summe der zu ihnen gehörigen (d. h. von den Spitzen der Gegenwinkel auf sie gefällten) Perpendikel = c.

Analysis. Da durch die beiden letzten Bedingungen zugleich der von den beiden Seiten, deren Summe gegeben ist, eingeschlossene, also der der Seite a gegenüberliegende Winkel gegeben ist, so ist die Aufgabe (mittelst des Seite 19 gebildeten Dreiecks AFG) auf die bekannte, Seite 66 ausführlich behandelte Aufgabe reduzirt: ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Summe beider andern Seiten.

Konstruktion. Auf AB = c errichte in B einen Perpendikel BC und beschreibe von A als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = b einen Bogen, bis er BC in D schneidet; ziehe AD und halbire den Winkel ADB durch DE; von A als Mittelpunkt beschreibe mit einem Halbmesser = a einen Kreisbogen, der DE in F schneidet; ziehe AF und durch F eine Parallele mit BD, bis sie AD in G schneidet, so ist AGF das gesuchte Dreieck.

Digitized by Google

Beweis. AF = a; da FG ∥ BD ist, so ist GFD = FDB = FDG; also ist FG = DG und daher AG + FG = AG + DG = AD = b; ferner werde AB durch FG oder dessen Verlängerung in H geschnitten, fälle von F auf AG und von G auf DB die Perpendikel FK und GL; da FG ∥ BD und BD auf AB senkrecht ist, so ist auch FG auf AB senkrecht, oder AH ist der von A auf FG gefällte Perpendikel; da ferner auch GL senkrecht auf BD ist, so ist GL ∥ AB, also GLBH ein Rechteck und GL = HB; nun ist FGK = BDG, weil FG ∥ BD ist, FKG = GLD = 90° und FG = DG; also ist △ FGK ≅ △ GDL und daher FK = GL = HB; folglich ist AH + FK = AH + HB = AB = c.



II. Aufgabe.

Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist ein Winkel = α, der von der Spitze desselben auf die Gegenseite gefällte Höhenperpendikel = a und die Summe der beiden andern Höhenperpendikel = b.

Analysis. Durch α und b ist ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt, in welchem b Kathete und α der gegenüberliegende spitzige Winkel ist und dessen Hypotenuse die Summe der beiden den Winkel α einschließenden Seiten ist. Die Aufgabe ist also reduzirt auf die Seite 94 gelöste Aufgabe: ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist die Summe zweier Seiten, der eingeschlossene Winkel und der zur dritten Seite gehörige Höhenperpendikel.

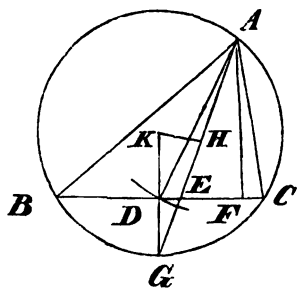
Digitized by Google

Konstruktion und Beweis bleiben dem Schüler überlassen; sie haben unter Berücksichtigung der zur vorigen Aufgabe gegebenen Lösung, so wie der Seite 94 behandelten Aufgabe keine Schwierigkeit.

III. Aufgabe.

Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben sind eine Mittellinie = a, die Halbirungslinie des zu ihr gehörigen Winkels = b und die Differenz der beiden andern Winkel = α.

Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, von welchem gegeben sei die Mittellinie AD, die Halbirungslinie AE des Winkels BAC, durch welche AD hindurchgeht und ACB — ABC. Von A fälle auf BC den Perpendikel AF, so ist nach Seite 20 EAF = $^1/_2$(ACB — ABC); also ist durch AE und $^1/_2$(ACB — ABC) das Dreieck AEF, folglich die Punkte A, E, F gegeben; da AD gegeben ist, so ist auch D gegeben. Da D Halbirungspunkt von BC und AE Halbirungslinie des gegenüberliegenden Winkels BAC ist, so müssen, wenn man um △ ABC einen Kreis beschreibt, die Verlängerung von AE und der auf BC in D errichtete Perpendikel einander auf der Peripherie dieses Kreises schneiden, weil beide durch den Halbirungspunkt des zu BC gehörigen Bogens gehen; nun ist DF, also der in D auf BC errichtete Perpendikel der Lage nach gegeben; da nun auch AE gegeben ist, so ist der Durchschnitt G von beiden gegeben und die Verlängerung von DG muß durch den Mittelpunkt dieses Kreises gehen; da nun AG Chorde desselben ist, also der auf AG im Halbirungspunkte H errichtete Perpendikel auch durch diesen Mittelpunkt gehen muß, so ist der Mittelpunkt K dieses Kreises, also auch sein Halbmesser AK



Digitized by Google

folglich der Kreis selbst gegeben; folglich sind die Punkte B und C als Durchschnitte der Verlängerungen von DF mit diesem Kreise und daher △ ABC gegeben.

Konstruktion. Konstruire ein rechtwinkliges Dreieck AEF so, daß die Hypotenuse AE = b und der spitzige Winkel EAF = $^1/_2\alpha$ ist. Von A als Mittelpunkt beschreibe mit einem Halbmesser = a einen Kreisbogen, der die Verlängerung von EF in D schneide und ziehe AD; auf DF errichte in D einen Perpendikel, welcher die Verlängerung von AE in G schneide; auf AG errichte im Halbirungspunkte H einen Perpendikel, welcher die Verlängerung von GD in K schneide und beschreibe von K als Mittelpunkt mit KG als Halbmesser einen Kreis, endlich verlängere DF, bis es die Peripherie dieses Kreises in B und C treffe, und ziehe AB und AC, so ist △ ABC das gesuchte.

Beweis. Der Kreis geht durch A, weil KH auf AG im Halbirungspunkte H senkrecht steht. Da KD auf BC senkrecht steht und K Mittelpunkt, BC Chorde des Kreises ist, so ist BC in D halbirt; also ist AD = a die zu BC oder BAC gehörige Mittellinie des Dreiecks ABC; da ferner BC in D halbirt ist und DG auf BC senkrecht steht, so ist auch der Bogen BGC in G halbirt, oder BG = CG, daher ist BAG = CAG, oder AE = b ist Halbirungslinie des Winkels BAC; endlich ist ACF + FAC = 90° und ABF + BAF = 90°, folglich ist ACF + CAE = 90° + EAF und ABF + BAE = 90° — EAF, folglich, wenn die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt wird, weil CAE = BAE ist, ACF — ABF = 2EAF = 2 . $^1/_2\alpha$ = α.

IV. Aufgabe.

Ein Parallelogramm zu konstruiren, von welchem gegeben ist der Flächeninhalt = a^2*), ein

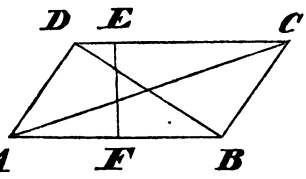
*) Der Flächeninhalt kann immer einem Quadrate gleich angenommen werden, weil er, wenn er auch in irgend einer andern Form gegeben ist, stets in ein Quadrat verwandelt werden kann.

Digitized by Google

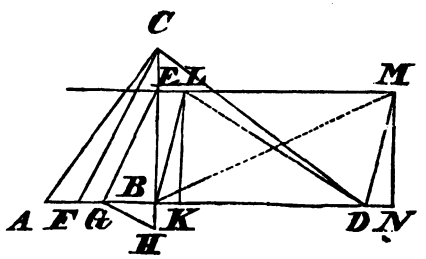
Höhenperpendikel = b und die Differenz der Quadrate beider Diagonalen = c^2.

1. Auflösung.

Analysis. Es sei ABCD das gesuchte Parallelogramm, von welchem der Flächeninhalt = a^2, der von CD auf AB gefällte Perpendikel EF = b und $AC^2 - BD^2 = c^2$ gegeben sei. Da $a^2 = EF \cdot AB = b \cdot AB$ ist, so ist AB gegeben. Ferner ist nach Seite 21 durch a^2 und c^2 der Winkel BAD gegeben; mithin ist die Aufgabe reduzirt auf die bekannte Aufgabe: ein Parallelogramm zu konstruiren, von welchem gegeben sind eine Seite, die dazu gehörige Höhe und ein Winkel.



Konstruktion. Auf AB = b errichte in B einen Perpendikel BC = a, ziehe AC und errichte auf AC in C einen Perpendikel, bis er die Verlängerung von AB in D trifft; auf BC oder dessen Verlängerung nimm BE = AB, von AB schneide BF = $\frac{1}{2}c$ ab, ziehe CF und durch E EG ∥ CF, bis es AB in G trifft; auf EG errichte in G einen Perpendikel GH, bis er die Verlängerung von EB in H trifft, und schneide BK = BH von BD ab; durch E ziehe eine Parallele mit AD und errichte auf BD in K einen Perpendikel, bis er die Parallele in L trifft; endlich ziehe BL und durch D eine Parallele mit BL, bis er die vorige Parallele in M trifft, so ist BDML das gesuchte Parallelogramm.



Beweis. KL = EB = AB = b; ferner ist BDML = BD . KL = BD . AB = $BC^2 = a^2$. Endlich ist, wenn

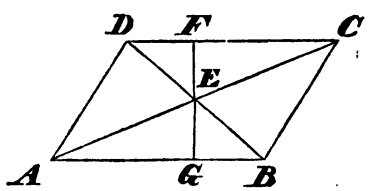
Digitized by Google

BM und DL gezogen werden und wenn von M auf die Verlängerung von BD ein Perpendikel MN gefällt wird, $BM^2 = BD^2 + DM^2 + 2BD \cdot DN$ und $LD^2 = BD^2 + BL^2 - 2BD \cdot BK$, folglich da DM = BL und DN = BK ist, weil $\triangle$ DMN $\cong$ $\triangle$ BLK ist, $BM^2 - LD^2 = 4BD \cdot BK$; daher ist $BDML : BM^2 - LD^2 = BD \cdot KL : 4BD \cdot BK = KL : 4BK = BE : 4BH = BE^2 : 4BE \cdot BH = BE^2 : 4BG^2 = BC^2 : 4BF^2$, (weil $BE : BG = BC : BF$, also auch $BE^2 : BG^2 = BC^2 : BF^2$ und daher auch $BE^2 : 4BG^2 = BC^2 : 4BF^2$ ist) $= a^2 : 4 \cdot {}^1/_4c^2 = a^2 : c^2$. Nun ist BDML $= a^2$; also ist $BM^2 - LD^2 = c^2$.

Allerdings führen solche Data nicht gerade immer auf die einfachste Auflösung. Im vorliegenden Falle namentlich möchte wohl folgende zweite Auflösung die einfachere sein.

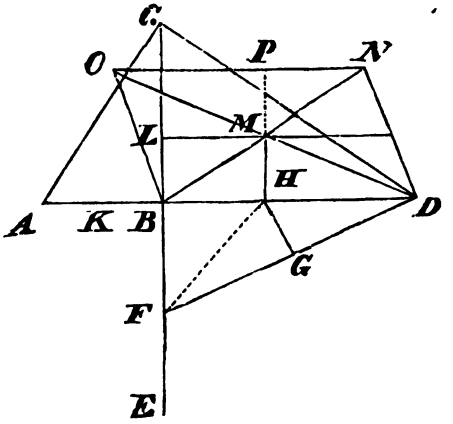
2. Auflösung.

Analysis. Es sei ABCD das gesuchte Parallelogramm; ziehe beide Diagonalen AC und BD, welche sich in E schneiden, durch E ziehe einen Perpendikel FG auf die Parallelen AB, CD, und es sei gegeben der Flächeninhalt $= a^2$, der von CD auf AB gefällte Perpendikel $FG = b$ und $AC^2 - BD^2 = c^2$. Da $ABCD = AB \cdot FG = b \cdot AB = a^2$ ist, so ist AB gegeben; ferner ist FG, also auch $EG = {}^1/_2FG$ gegeben. Von $\triangle$ ABE sind also die Punkte A und B gegeben; ferner ist $AE = {}^1/_2AC$, $BE = {}^1/_2BD$, also $AE^2 - BE^2 = {}^1/_4AC^2 - {}^1/_4BD^2 = {}^1/_4(AC^2 - BD^2) = {}^1/_4c^2$; also ist $AE^2 - BE^2$ gegeben; nun ist $AE^2 = AG^2 + GE^2$ und $BE^2 = BG^2 + GE^2$; also ist $AE^2 - BE^2 = AG^2 - BG^2$; folglich ist auch $AG^2 - BG^2$ gegeben und daher weil AB gegeben ist, so ist auch G, also der auf AB in G errichtete Perpendikel $GE = {}^1/_2b$, also ist E und daher AE und BE, folglich auch EC = AE und ED = BE, also C und D und daher ABCD gegeben.



Digitized by Google

Konstruktion. Auf AB = b errichte in B einen Perpendikel BC = a, ziehe AC und errichte auf AC in C einen Perpendikel CD, bis dieser die Verlängerung von AB in D trifft; verlängere CB so nach E, daß BE = c wird, halbire BE in F, ziehe DF und errichte auf DF im Halbirungspunkte G einen Perpendikel, bis er BD in H trifft; halbire AB in K; schneide BL = BK von BC ab und errichte auf BD in H einen Perpendikel, bis dieser eine durch L gezogene Parallele mit BD in M trifft; ziehe BM, DM und verlängere beide so nach N und O, daß MN = BM und MO = DM wird; endlich ziehe BO, DN, ON, so ist BDNO das gesuchte Parallelogramm.



Beweis. Verlängere HM, bis es ON in P trifft. Da die Diagonalen BN und DO sich in M halbiren, so ist BDNO ein Parallelogramm; folglich ist auch HP in M halbirt und HP ist die Höhe des Parallelogramms, weil HM auf BD senkrecht steht; daher ist BDNO = BD . HP; aber HP = AB, weil HM = BL = BK = $^1/_2$AB ist; daher ist BDNO = BD . AB = $BC^2 = a^2$. Ziehe ferner FH. Da $DM^2 = DH^2 + HM^2$ und $BM^2 = BH^2 + HM^2$ ist, so ist $DM^2 - BM^2 = DH^2 - BH^2 = FH^2 - BH^2$ (weil H auf dem im Halbirungspunkte auf DF errichteten Perpendikel liegt, also DH = FH ist) = BF^2. Daher ist $DO^2 - BN^2 = 4DM^2 - 4BM^2 = 4BF^2 = BE^2 = c^2$.

So viel zur Anwendung der oben Seite 161 gegebenen drei Daten. Daß sich eine Menge der bekanntesten und einfachsten Lehrsätze der ebenen Geometrie als Daten ausdrücken

Digitized by Google

lassen, erhellt aus der Seite 160 in der Note angeführten Schrift des Euklid, welche unter andern folgende Lehrsätze über Daten enthält:

1. Wenn zwei Größen gegeben sind, so ist ihr Verhältniß gegeben. (Euklids Data, verbessert und vermehrt von Robert Simson, aus dem Englischen übersetzt von Schwab. Stuttgart, 1780. Satz I.)

2. Wenn gegebene Größen zu einander addirt werden, so ist ihre Summe gegeben. (Ebd. Satz III.)

3. Wenn zwei der Lage nach gegebene Linien einander schneiden, so sind der Punkt oder die Punkte, worin sie sich schneiden, gegeben. (Ebd. Satz XXVIII.)

4. Wenn die Endpunkte einer geraden Linie der Lage nach gegeben sind, so ist die gerade Linie der Lage und Größe nach gegeben. (Ebd. Satz XXIX.)

5. Wenn eine der Größe nach gegebene gerade Linie zwischen zwei geraden der Lage nach gegebenen Parallellinien gezogen wird, so wird sie mit den Parallellinien gegebene Winkel machen. (Ebd. Satz XXXVI.)

6. Wenn jeder von den Winkeln eines Dreiecks der Größe nach gegeben ist, so ist das Dreieck der Gattung nach gegeben. (Ebd. Satz XLIII.)

7. Wenn einer von den Winkeln eines Dreiecks gegeben ist und die anliegenden Seiten ein gegebenes Verhältniß zu einander haben, so ist das Dreieck der Gattung nach gegeben. (Ebd. Satz XLIV.)

8. Wenn die Seiten eines Dreiecks gegebene Verhältnisse zu einander haben, so ist das Dreieck der Gattung nach gegeben. (Ebd. Satz XLV.)

9. Wenn einer von den Winkeln eines Dreiecks gegeben ist und wenn die Summe der ihn einschließenden Seiten zur dritten Seite ein gegebenes Verhältniß hat, so ist das Dreieck der Gattung nach gegeben. (Ebd. Satz XLVIII.)

10. Geradlinige Figuren, die der Gattung nach gegeben sind, lassen sich in Dreiecke zerlegen, die der Gattung nach gegeben sind. (Ebd. Satz LI.)

Digitized by Google

11. Wenn eine der Gattung nach gegebene geradlinige Figur über einer der Größe nach gegebenen geraden Linie beschrieben wird, so ist sie der Größe nach gegeben. (Ebd. Satz LVI.)

12. Wenn ein Dreieck einen gegebenen stumpfen Winkel hat, so wird der Ueberschuß des Quadrats der Seite, die dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, über die Summe der Quadrate der anliegenden Seiten ein gegebenes Verhältniß zum Dreiecke haben. (Ebd. Satz LXXIV.)

13. Wenn eine gerade Linie, in einem der Größe nach gegebenen Kreise gezogen, einen Kreisabschnitt begrenzt, der einen gegebenen Winkel faßt, so ist die gerade Linie der Größe nach gegeben. (Ebd. Satz XCI.)

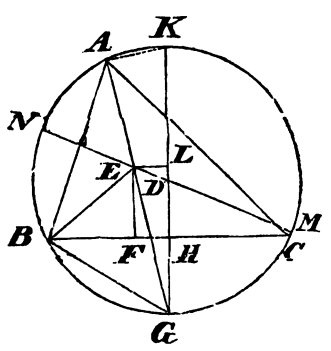
14. Wenn von einem gegebenen Punkte eine gerade Linie gezogen wird, die einen der Lage nach gegebenen Kreis berührt, so ist die gerade Linie der Lage und Größe nach gegeben. (Ebd. Satz XCIV.)

u. s. w.

Folgendes möchten noch einige wichtigere, für die Lösung von Aufgaben und ihre Reduktion auf andere besonders brauchbare, weniger bekannte Data sein.

1. Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich dem Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises, dem Halbmesser des einbeschriebenen Kreises und der Entfernung der Mittelpunkte dieser Kreise zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.

Beweis. Es sei D der Mittelpunkt des um △ ABC beschriebenen Kreises, und E der Mittelpunkt des in dasselbe beschriebenen Kreises, also EF der Halbmesser des letztern und ED die Entfernung der Mittelpunkte beider; ziehe AE und verlängere es, bis es die Peripherie in G trifft, so ist nach einer bekannten Eigen-



Digitized by Google

schaft des in das Dreieck beschriebenen Kreises BAC durch AG, also auch der Bogen BGC in G halbirt; zieht man also DG, so steht DG auf BC in H senkrecht und halbirt BC; verlängere DG bis zur Peripherie nach K und ziehe AK und durch E eine Parallele EL mit BC. Da EGL = AGK und ELG = 90° = GAK ist, so ist △ EGL ∽ △ AGK und daher GL : GA = GE : GK, also GL . GK = GA . GE, d. h. (GH + HL)GK = (GE + EA)GE, oder GH . GK + HL . GK = GE^2 + EA . GE; nun ist, wenn BG und BE gezogen werden, durch welches letztere wieder ABC halbirt ist, GBE = GBC + CBE = GAC + CBE = $^1/_2$BAC + $^1/_2$ABC und ebenso GEB = BAE + ABE = $^1/_2$BAC + $^1/_2$ABC, also GBE = GEB und daher GE = GB; aber GB^2 = GH . GK, weil GK Durchmesser und BH senkrecht auf GK ist; daher ist auch GE^2 = GH . GK und daher EA . GE = HL . GK. Verlängert man nun ED, bis es den Kreis in M und N trifft, so ist EA . GE = EM . EN; also ist auch EM . EN = HL . GK. Aber wenn man den Halbmesser DG = DM = DN = DK = R und dem Halbmesser EF = LH = r, so wie ED = e setzt, so ist EM . EN = (R+e) (R − e) = R^2 − e^2 und HL . GK = 2Rr; daher ist R^2 − e^2 = 2Rr, also R^2 − 2Rr = e^2, oder R(R − 2r) = e^2, also R : e = e : R − 2r. Wenn daher von den drei in dieser Proportion vorkommenden Größen R, r, e zwei gegeben sind, so ist auch die dritte gegeben, d. h. sie kann vermittelst der entwickelten Proportion aus den beiden vorigen gefunden werden.*)

2. Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich dem Halbmesser R des um das Dreieck beschriebenen

---

*) Ist nemlich R und r gegeben, so ist auch R − 2r zu bestimmen und daher zu zwei gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionale e zu suchen. Ist ferner R und e gegeben, so ist R − 2r die dritte Proportionale zu R und e, also konstruirbar, woraus, da R bekannt ist, 2r also auch r gefunden wird: Ist endlich r und e gegeben, so ist 2r die Differenz zwischen R und R − 2r, also die Bestimmung von R reduzirt auf die Aufgabe: eine stetige Proportion zu konstruiren, von welcher das mittlere Glied und die Differenz der äußeren Glieder gegeben sind. (s. Seite 46.)

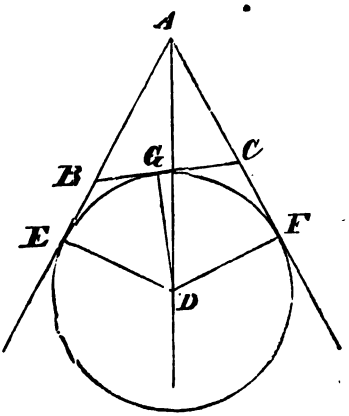
Digitized by Google

Kreiſes, dem Halbmeſſer r' eines an das Dreieck beſchriebenen äußern Berührungskreiſes und der Entfernung e der Mittelpunkte dieſer beiden Kreiſe zwei gegeben ſind, ſo iſt auch das dritte Stück gegeben.

Beweis. Mit Zugrundelegung der früheren Bemerkungen über die Analogie (Seite 120), welche ebenſowohl auf Lehrſätze wie auf Aufgaben ſich anwenden laſſen, wird es dem Schüler nicht ſchwer werden, ganz nach dem in dem vorigen Beweiſe eingeſchlagenen Gange die Proportion zu entwickeln: $R : e = e : R + 2r'$, woraus ſich wieder ergibt, daß aus zweien der genannten drei Größen die dritte abgeleitet werden kann.

3. Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich einem Winkel α, dem Halbmeſſer r' des zur gegenüberliegenden Seite gehörigen äußern Berührungskreiſes und dem Umfange P des Dreiecks zwei gegeben ſind, ſo iſt auch das dritte Stück gegeben.

Beweis. In $\triangle$ ABC ſei $BAC = \alpha$ und D der Mittelpunkt des zur gegenüberliegenden Seite BC gehörigen äußern Berührungskreiſes, der die Verlängerungen von AB und AC in E und F, BC ſelbſt aber in G berühre; zieht man daher DE, DG, DF, ſo iſt $DE = DG = DF = r'$ und $BE = BG$, $CF = CG$, $AE = AF$; daher iſt $AE = AB + BG$, $AF = AC + CG$; alſo $AE + AF = AB + AC + BC = P$ und folglich $AE = \frac{1}{2}P$. Zieht man endlich AD, ſo wird durch AD der Winkel $BAC = \alpha$ halbirt.



In dem rechtwinkligen Dreiecke ADE iſt daher $AE = \frac{1}{2}P$, $DE = r'$ und $EAD = \frac{1}{2}\alpha$; da nun dieſes Dreieck durch zwei

Digitized by Google

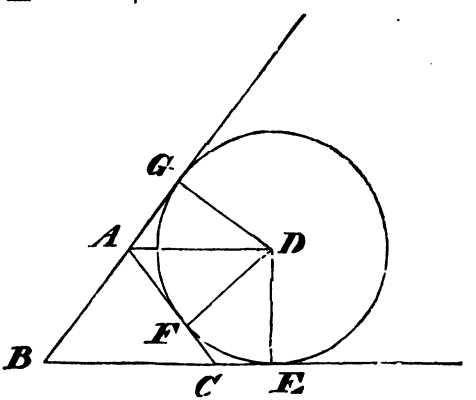
der genannten Stücke vollkommen bestimmt ist, so ist mit zweien derselben auch das dritte gegeben.

4. Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich einem Winkel α, dem Halbmesser r des innern Berührungskreises und dem Ueberschusse d der Summe der den Winkel α einschließenden Seiten über die α gegenüberliegende Seite zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.

Beweis. Es bleibt wieder dem Schüler überlassen, denselben nach Analogie des vorigen zu führen.

5. Wenn in einem Dreiecke ABC von folgenden drei Stücken, nemlich einem Winkel α, dem Halbmesser r'' des zu einem der einschließenden Seiten gehörigen äußern Berührungskreises und dem Ueberschusse d der Summe dieser und der dem Winkel α gegenüberliegenden Seite über die dritte zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.

Beweis. In $\triangle$ ABC sei BAC $= \alpha$ und D der Mittelpunkt des zur Seite AC gehörigen äußern Berührungskreises, der die Verlängerung beider andern Seiten AB und CB in G und E, die Seite AC selbst in F berühre; zieht man DE, DF, DG, AD, so ist DE = DF = DG = r'' und CAG durch AD halbirt; ferner ist wie in Satz 3 $BG = \frac{AB + AC + BC}{2}$, also $AG = \frac{AB + AC + BC}{2} - AB = \frac{AB + AC + BC - 2AB}{2}$

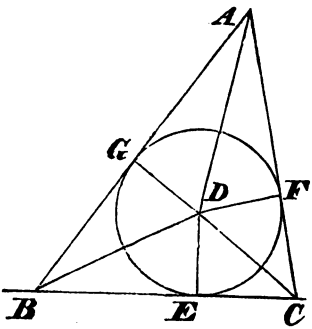


$= \frac{AC + BC - AB}{2} = {}^1/_2 d$. Im rechtwinkligen Dreiecke DAG

Digitized by Google

ist daher ADG = $^1/_2\alpha$ (weil CAG Nebenwinkel von BAC, also GDF = CAB als Supplement von FAG ist), AG = $^1/_2$d und DG = r''; da nun dieses Dreieck durch zwei der genannten Stücke vollständig bestimmt ist, so ist mit zweien derselben auch das dritte gegeben.

6. Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich dem Halbmesser r des innern Berührungskreises, dem Umfange P des Dreiecks und dem Flächeninhalte F zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.



Beweis. In △ ABC sei D Mittelpunkt des innern Berührungskreises und DE = DF = DG = r die nach den Berührungspunkten gezogenen, also auf den Seiten senkrecht stehenden Halbmesser dieses Kreises, so ist, wenn AD, BD, CD gezogen werden, △ ABC = △ ABD + △ ACD + △ BCD; nun ist △ ABD = $\frac{AB \cdot DG}{2}$, △ ACD = $\frac{AC \cdot DF}{2}$, △ BCD = $\frac{BC \cdot DE}{2}$; daher ist △ ABC = $\frac{(AB + AC + BC)\,DE}{2}$, d. h. F = $\frac{rP}{2}$; folglich ist durch zwei von den drei Stücken r, P, F auch das dritte gegeben.

7. Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich dem Halbmesser r' eines äußern Berührungskreises, dem Ueberschusse d der Summe der in der Verlängerung berührten Seiten des Dreiecks über die dritte vom Kreise selbst berührte und dem Flächeninhalte F des Dreiecks zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.

Beweis. Nach Analogie des vorigen zu führen, wodurch man erhält F = $\frac{r'd}{2}$.

Digitized by Google

8. Wenn von einem um einen Kreis beschriebenen Vierecke von folgenden drei Stücken, nemlich dem Halbmesser r des Kreises, dem Umfang P des Vierecks und dem Flächeninhalte F zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.

Beweis. Ebenfalls Analogie zu Satz 6.

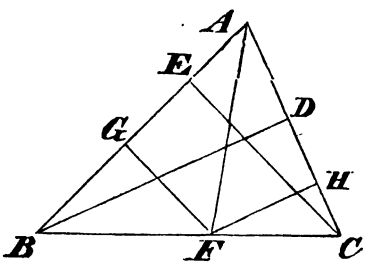
Zusatz. Gleiche Sätze gelten für Fünfecke, Sechsecke u. s. w., welche um einen Kreis beschrieben sind.

9. Wenn von einem um einen Kreis beschriebenen Vierecke von folgenden drei Stücken, nemlich dem Halbmesser r des Kreises, der Summe S zweier einander gegenüberliegender Seiten und dem Flächeninhalte F des Vierecks zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.

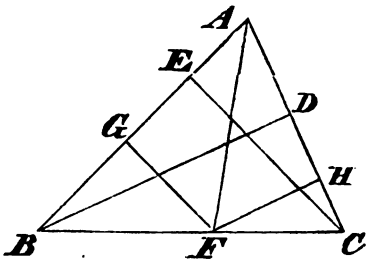
Beweis. Folgt aus dem Vorigen, unter Anwendung des Satzes, daß in jedem um einen Kreis beschriebenen Vierecke die Summe der ersten und dritten Seite gleich ist der Summe der zweiten und vierten.

10. Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich dem Halbmesser r eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf einer Seite des Dreiecks liegt und der die beiden andern Seiten berührt, und den beiden zu den letztern Seiten gehörigen Höhenperpendikeln h und h' zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.

Beweis. In $\triangle$ ABC seien von B und C auf AC und AB die Perpendikel BD = h, CE = h' gefällt; halbire BAC und verlängere die Halbirungslinie, bis sie die Gegenseite BC in F schneidet, und fälle von F auf AB oder AC den Perpendikel FG oder FH, so ist F Mittelpunkt und FG = FH = r Halbmesser des AB und AC in G und H berührenden Kreises. Nun ist $\triangle ABC = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{AB \cdot CE}{2}$; daher ist BD : CE = AB : AC,



Digitized by Google



d. h. $h : h' = AB : AC$; aber weil BAC durch AF halbirt ist, so ist $AB : AC = BF : CF$; also ist auch $h : h' = BF : CF$; folglich $h : h + h' = BF : BF + CF = BF : BC$; aber $FG \parallel CE$, also $BF : BC = FG : CE = r : h'$; daher ist auch $r : h' = h : h + h'$, in welcher Proportion aus zweien der drei Stücke h, h', r das dritte bestimmt werden kann.

11. Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich dem Halbmesser r des innern Berührungskreises, dem Halbmesser r' eines äußern Berührungskreises und dem zu der von dem letztern Kreise wirklich berührten Seite gehörigen Höhenperpendikel h zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.

Beweis. Setzt man die drei Seiten eines Dreiecks ABC gleich a, b, c, so ist nach Satz 6 $\triangle ABC = \frac{r(a+b+c)}{2}$, und nach Satz 7 $\triangle ABC = \frac{r'(b+c-a)}{2}$, wenn a als diejenige Seite betrachtet wird, welche den mit r' beschriebenen äußern Berührungskreis selbst berührt und zu welcher also der Höhenperpendikel h gehört; daher ist $\triangle ABC$ auch $= \frac{ah}{2}$; mithin ist $r(a+b+c) = ah$ und $r'(b+c-a) = ah$; folglich $a + b + c : a = h : r$ und daher $b + c : a = h - r : r$; ebenso ist $b + c - a : a = h : r'$ und daher $b + c : a = h + r' : r'$; folglich $h - r : r = h + r' : r'$, und daher $h : r = h + 2r' : r'$, oder $h - 2r : r = h : r'$, also auch $h : r = 2r' : r' - r$; aus jeder dieser drei Proportionen aber kann, wenn zwei von den drei Stücken h, r, r' gegeben sind, das dritte gefunden werden.

12. Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich zwei Halbmessern r' und r'' zweier äußerer Berüh-

Digitized by Google

rungskreise und dem Höhenperpendikel h''', welcher zu der dritten von jenen Kreisen nicht selbst berührten Seite gehört, zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.

Beweis. Es seien wieder a, b, c die drei Seiten des Dreiecks ABC und der mit r' beschriebene Kreis berühre a selbst, der mit r'' beschriebene b, also gehöre h''' zu c, so ist nach Satz 7 $\triangle ABC = \frac{r'(b+c-a)}{2}$, $\triangle ABC = \frac{r''(a+c-b)}{2}$; aber auch $\triangle ABC = \frac{c\,h'''}{2}$; folglich ist $r'(b+c-a) = c\,h'''$ und $r''(a+c-b) = c\,h'''$; daher ist $b+c-a : c = h''' : r'$ und $a+c-b : c = h''' : r''$; folglich ist $b-a : c = h''' - r' : r'$ und ebenso $b-a : c = r'' - h''' : r''$; daher ist $h''' - r' : r' = r'' - h''' : r''$ und daher $h''' : r' = 2r'' - h''' : r''$, oder $2r' - h''' : r' = h''' : r''$, also auch $h''' : r' = 2r'' : r' + r''$; aus jeder dieser drei Proportionen aber kann, wenn zwei von den drei Stücken h''', r', r'' gegeben sind, das dritte gefunden werden.

13. Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich dem Flächeninhalte F, einem Winkel α und dem Ueberschusse d^2 des Quadrats der Summe beider einschließenden Seiten über das Quadrat der dritten Seite zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.

Beweis. Die drei Seiten des Dreiecks ABC seien bezeichnet mit a, b, c und a sei die α gegenüberliegende, also b, c die α einschließenden Seiten, so ist $d^2 = (b+c)^2 - a^2 = (b+c+a)(b+c-a)$. Da nun nach Satz 6 $F = \frac{r(a+b+c)}{2}$ ist, so ist $F : d^2 = \frac{r(a+b+c)}{2} : (b+c+a)(b+c-a) = \frac{r}{2} : (b+c-a)$, also $2F : \frac{1}{2}d^2 = r : \frac{b+c-a}{2}$ oder $4F : d^2 = r : \frac{b+c-a}{2}$. Nach Satz 4 aber

Digitized by Google

liegen r, $\frac{b+c-a}{2}$ und $\frac{1}{2}\alpha$ in einem rechtwinkligen Dreiecke und es ist also durch das Verhältniß von $r : b+c-a$ sowohl α, als umgekehrt durch α das Verhältniß $r : b+c-a$ gegeben; daher kann mittelst der obigen Proportion $4F : d^2 = r : \frac{b+c-a}{2}$ aus zwei von den drei Größen F, d^2, α die dritte gefunden werden.

14. Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich dem Flächeninhalte F, einem Winkel α und dem Ueberschusse d^2 des Quadrats der gegenüberliegenden Seite über das Quadrat der Differenz beider einschließenden Seiten zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.

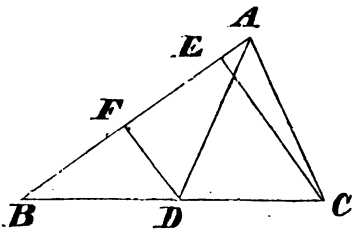
Beweis. Die drei Seiten des Dreiecks ABC seien bezeichnet mit a, b, c und a sei die α gegenüberliegende, also b und c die α einschließenden Seiten, so ist $d^2 = a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c)$. Da nun nach Satz 7 $F = \frac{r''(a+c-b)}{2}$ ist, wenn r'' den Halbmesser des die Seite b selbst berührenden äußern Berührungskreises bezeichnet, so ist $F : d^2 = \frac{r''(a+c-b)}{2} : (a+b-c)(a-b+c) = \frac{r''}{2} : a+b-c$, also $2F : \frac{1}{2}d^2 = r'' : \frac{a+b-c}{2}$ oder $4F : d^2 = r'' : \frac{a+b-c}{2}$. Nach Satz 5 aber liegen r'', $\frac{a+b-c}{2}$ und $90^0 - \frac{1}{2}\alpha$ in einem rechtwinkligen Dreiecke und es ist also durch das Verhältniß $r'' : \frac{a+b-c}{2}$ der Winkel $90^0 - \frac{1}{2}\alpha$, also auch α, so wie umgekehrt durch α das Verhältniß $r'' : \frac{a+b-c}{2}$ bestimmt: daher kann mittelst der obigen Proportion $4F : d^2$

Digitized by Google

$= r'' : \frac{a + b - c}{2}$ aus zwei von den drei Größen F, d^2 und α die dritte gefunden werden.

15. Wenn in einem Dreiecke von folgenden drei Stücken, nemlich dem Flächeninhalte F, einem Winkel α und dem Ueberschusse d^2 der Quadratsumme der beiden einschließenden Seiten über das Quadrat der Gegenseite zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben.

Beweis. Es seien wieder die beiden Seiten des Dreiecks ABC mit a, b, c bezeichnet und zwar sei BC = a die dem Winkel BAC = α gegenüberliegende Seite; halbire BC in D und ziehe AD, so ist $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$, also $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 - BC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 - 4BD^2 = 2AD^2 - 2BD^2$; fällt man ferner von D auf AB den Perpendikel DF, so ist $AD^2 = AF^2 + DF^2$ und $BD^2 = BF^2 + DF^2$, also $AD^2 - BD^2 = AF^2 - BF^2$ und daher $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2AF^2 - 2BF^2$, d. h. $d^2 = 2(AF^2 - BF^2) = 2(AF + BF)(AF - BF)$, oder wenn von C ein Perpendikel CE auf AB gefällt wird, wodurch FE = BF wird, weil CD = BD ist, $d^2 = 2(AF + BF)(AF - FE) = 2AB \cdot AE$. Nun ist $F = \frac{AB \cdot CE}{2}$, also ist $F : d^2 = \frac{AB \cdot CE}{2} : 2AB \cdot AE = \frac{CE}{2} : 2AF$ und daher $2F : \frac{d^2}{2} = CE : AE$, also $4F : d^2 = CE : AE$.



Durch den Winkel BAC = α aber ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ACE das Verhältniß von CE : AE und umgekehrt durch dieses Verhältniß der Winkel α gegeben; vermittelst der Proportion $4F : d^2 = CE : AE$ kann daher aus zweien von den drei Stücken F, d^2, α das dritte gefunden werden.

Digitized by Google

§. 6.

Die Auflösung der Aufgaben durch geometrische Oerter.

Unter einem geometrischen Orte versteht man eine Linie — sei es nun eine gerade oder eine Kreislinie —, welche die Eigenschaft hat, daß sämmtliche auf ihr liegende Punkte, aber nur diese, einer bestimmten Bedingung Genüge leisten. So ist z. B. die Peripherie eines Kreises der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkte (dem Mittelpunkte) eine gegebene Entfernung (gleich dem Halbmesser) haben. Ebenso ist der im Halbirungspunkte einer begrenzten geraden Linie errichtete Perpendikel der geometrische Ort für alle Punkte, welche von den beiden Endpunkten der geraden Linie gleichweit entfernt sind, also für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche die gegebene begrenzte gerade Linie zur Grundlinie haben.

Die Sätze über die geometrischen Oerter sind also auch Lehrsätze wie die Sätze über die Data; der letztere Satz z. B. ist nichts anderes, als der bekannte hier nur in anderer Form ausgesprochene Lehrsatz: wenn man im Halbirungspunkte auf einer begrenzten geraden Linie einen Perpendikel errichtet, so ist jeder Punkt dieses Perpendikels von den Endpunkten der geraden Linie gleichweit entfernt, jeder Punkt aber, der nicht auf dem Perpendikel liegt, hat von diesen Endpunkten ungleiche Entfernung. Von diesem Gesichtspunkte aus bildet die Auflösung der Aufgaben durch geometrische Oerter auf gleiche Weise nur einen besondern Fall der Auflösung durch Lehrsätze, wie dieß auch bei der Auflösung durch Data bemerkt wurde. Die Auflösung durch Oerter aber trägt einen eigenthümlichen Charakter an sich und wird deßwegen mit Recht als eine besondere Art aufgeführt, um so mehr, da sie, wie die folgenden Bemerkungen zeigen werden, wohl die wichtigste Art von Auflösungsmethoden ist.

Digitized by Google

Jede Aufgabe nemlich, welche nicht so viele Bedingungen enthält, als nach den im ersten Buche §. 3 gegebenen Entwicklungen erforderlich sind, ist eine unbestimmte und läßt stets unendlich viele Auflösungen zu. Aber auch hier gibt es wieder verschiedene Fälle. Für das Dreieck z. B. ist zur vollständigen Bestimmung die Zahl von drei Bedingungen erforderlich. Ist nun nur eine einzige Bedingung gegeben, so können die unendlich vielen Auflösungen in der Regel nicht so geordnet werden, daß die dazu gehörigen Punkte eine bestimmte Reihenfolge bilden. Ist z. B. nur eine Seite des Dreiecks gegeben, so kann, wenn die Endpunkte dieser Seite irgendwo festgelegt und dadurch zwei Winkelspitzen des Dreiecks bestimmt sind, jeder Punkt in der Ebene, in welcher die Seite liegt — ausgenommen die auf der Seite selbst und ihrer Verlängerung liegenden — als dritte Winkelspitze genommen und dadurch das Dreieck selbst bestimmt werden. Wenn dagegen zwei Bedingungen gegeben sind, wenn also z. B. zur vorigen Bedingung beigefügt ist, das Dreieck soll gleichschenklig sein, so wird, falls die gegebene Seite Grundlinie werden soll, wenn durch sie zwei Winkelspitzen des Dreiecks bestimmt sind, die dritte nicht mehr ganz willkürlich in der Ebene angenommen werden dürfen; sondern wenn gleich auch jetzt noch unendlich viele Auflösungen möglich sind, so wird doch die dritte Winkelspitze nach dem Obigen auf dem im Halbirungspunkte der gegebenen Seite errichteten Perpendikel liegen müssen; soll dagegen die gegebene Seite ein Schenkel werden, so muß, wenn die beiden durch sie bestimmten Winkelspitzen mit A und B, die dritte aber mit C bezeichnet werden, C ebensoweit von A entfernt sein als B, oder ebensoweit von B als A entfernt ist; folglich muß C entweder auf dem vom Mittelpunkte A oder auf dem vom Mittelpunkte B mit der gegebenen Seite als Halbmesser beschriebenen Kreise liegen. In beiden Fällen also gibt es zwar unendlich viel Lagen der gesuchten dritten Winkelspitze, also eines gesuchten Punktes, aber es läßt sich im ersten Falle eine gerade Linie, im zweiten eine Kreislinie angeben, auf welcher der gesuchte Punkt liegen muß, also ein geometrischer Ort für denselben.

Digitized by Google

Die geometrischen Oerter dienen daher zunächst zur Auflösung unbestimmter Aufgaben, bei denen zwar unendlich viele Auflösungen möglich sind, bei denen aber die sämmtlichen möglichen Lagen eines zur Lösung gesuchten Punktes in Rücksicht auf die übrigen Punkte eine solche Beziehung zu einander haben, daß die sie verbindende Linie entweder eine gerade oder eine Kreislinie ist; denn von anderen Linien kann auf dem elementaren Standpunkte dieses Werkes nicht die Rede sein, wenngleich die höhere Geometrie noch eine Menge anderer Linien als geometrische Oerter aufzählt, ja von einem gewissen Gesichtspunkte aus so recht eigentlich als die Theorie der geometrischen Oerter bezeichnet werden könnte.

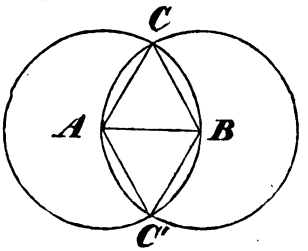
Wenn nun bei einer Aufgabe für einen Punkt zwei geometrische Oerter gefunden werden können, auf denen er liegen muß, so kann er nirgends sonst liegen, als auf dem Durchschnitte derselben; der Punkt ist also bestimmt, da zwei gerade Linien sich nur in einem einzigen, eine gerade Linie und ein Kreis aber oder zwei Kreise sich nur in zwei Pnnkten schneiden können, folglich für die Bestimmung des Punktes nur noch eine endliche Zahl von Auflösungen möglich ist.

Dadurch erscheinen die geometrischen Oerter nicht blos für die unbestimmten, sondern auch für die bestimmten Aufgaben als wichtig; ja da die Bestimmung der meisten Punkte durch den Durchschnitt zweier Linien geschieht, so bilden sie das wichtigste Element in der Lösung der Aufgaben. Es enthält daher auch das folgende Buch eine umfassendere Theorie der geometrischen Oerter, als gewöhnlich in den meisten Lehrbüchern enthalten ist, da die gründliche Kenntniß derselben das beste Erleichterungsmittel ist bei dem Selbstauffinden von Auflösungen durch geometrische Analysis.

Selbstverständlich handelt es sich dabei nur um diejenigen Oerter, welche zu geometrischen Konstruktionen verwendbar sind, nicht um solche, welche wenn auch wissenschaftlich von hohem Interesse, wie z. B. die Kegelschnitte, in ein anderes Gebiet als in das der geometrischen Analysis und der wirklichen Konstruktion gehören.

Digitized by Google

Auch bei den in den früheren Abschnitten gelösten Aufgaben wurden die geometrischen Oerter schon häufig angewendet, wenngleich dieser Ausdruck absichtlich noch vermieden wurde, da er seine Erklärung erst in dem gegenwärtigen Paragraphen finden konnte. Wir könnten hier nahezu jede Aufgabe als Beispiel aufführen. Ja selbst die erste und einfachste Aufgabe, welche beinahe in allen Lehrbüchern die Reihe der Aufgaben eröffnet, ist unmittelbare Anwendung eines geometrischen Ortes; ich meine hier die Aufgabe, auf einer gegebenen geraden Linie AB als Grundlinie ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben. Die Analysis wird folgende Betrachtung anstellen: Es sei ABC das gesuchte Dreieck, so ist AB gegeben; folglich sind die Punkte A und B gegeben; da nun CA = BA, also C von A ebensoweit entfernt ist als B, so ist ein von A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser AB beschriebener Kreis der geometrische Ort für C; aus dem nemlichen in Beziehung auf den Punkt B geltenden Grunde aber ist auch ein von B als Mittelpunkt mit dem Halbmesser BA beschriebener Kreis der geometrische Ort für C; also liegt C auf dem Durchschnitte beider Oerter. Daraus ergibt sich die bekannte Konstruktion der Aufgabe, sowie daß sich zwei gleichseitige Dreiecke ABC und ABC′ beschreiben lassen, welche die Grundlinie AB haben, da sich beide Oerter als Kreise in zwei Punkten C und C′ schneiden.



Die folgenden Aufgaben, die sich nur auf die bekannten, in allen Lehrbüchern vorkommenden Oerter gründen, mögen nicht sowohl dazu dienen, Neues zu geben, als vielmehr, eben weil sie zum Theil dem Schüler schon bekannt sein werden, ihn zu üben, die Analysis gerade von dem Gesichtspunkte des geometrischen Ortes aus aufzufassen.

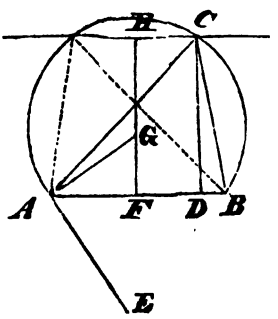
I. Aufgabe.

Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Seite a, der gegenüberliegende

Digitized by Google

Winkel α und der zu dieser Seite gehörige Höhenperpendikel b.

Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, in welchem AB = a, ACB = α und der von C auf AB gefällte Perpendikel CD = b gegeben sind. Da AB gegeben ist, so sind die Punkte A und B gegeben; da ferner ACB = α gegeben ist, so ist der geometrische Ort für C ein über AB beschriebener Kreisabschnitt, der einen Winkel = α faßt; da nun aber auch CD = b gegeben ist, also C von AB eine Entfernung = b haben soll, so ist der geometrische Ort für C eine von AB um b entfernte Parallele mit AB; also ist C durch den Durchschnitt beider Oerter, folglich auch △ ABC gegeben.



Konstruktion. An AB = a lege in A einen Winkel BAE = α an, errichte auf AB im Halbirungspunkte F und auf AE in A Perpendikel, welche sich in G schneiden und beschreibe von G als Mittelpunkt mit GA als Halbmesser einen Kreisbogen, der durch B gehen wird, da G von A und B gleichweit entfernt ist, weil GF auf AB im Halbirungspunkte senkrecht steht; verlängere FG nach H so, daß FH = b wird, und ziehe durch H eine Parallele mit AB, welche den Kreisbogen in C oder C′ schneide; ziehe AC, BC oder AC′, BC′, so ist △ ACB oder △AC′B das gesuchte.

Beweis. AB = a. Da ferner AB Chorde und AE Tangente des Kreisabschnittes ACB ist, so ist ACB = BAE = α; fälle endlich von C den Perpendikel CD auf AB, so ist CD ∥ HF, aber HC ∥ FD; also ist CD = HF = b. Dasselbe gilt für △ AC′B.

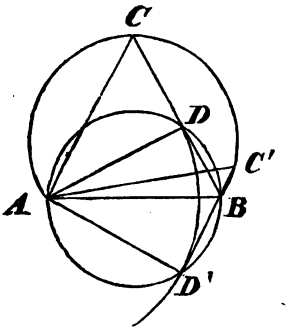
II. Aufgabe.

Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Seite = a, der gegenüberliegende

Digitized by Google

Winkel = α und ein zu einer der beiden andern Seiten gehöriger Höhenperpendikel = b.

Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, in welchem AB = a, der gegenüberliegende Winkel ACB = α und der von A auf BC gefällte Perpendikel AD = b sei. Da AB = a gegeben ist, so ist auch A und B gegeben; da ferner ACB = α gegeben ist, so ist ein über AB beschriebener Kreisabschnitt, der den Winkel α faßt, der geometrische Ort für D; ebenso ist ein über AB beschriebener Halbkreis der geometrische Ort für D, weil ADB = 90° ist; da nun aber auch AD gegeben ist, so ist auch ein von A als Mittelpunkt mit AD = b beschriebener Kreis der geometrische Ort für D; also ist D durch den Durchschnitt beider letztern Oerter gegeben; folglich ist BD, also auch durch die Verlängerung von BD bis zum Durchschnitte mit dem erstern Orte der Punkt C, folglich ist △ ABC gegeben.



Konstruktion. Mache AB = a; beschreibe wie in der vorigen Aufgabe über AB als Chorde einen Kreisabschnitt, der einen Winkel = α faßt, und ebenso über AB als Durchmesser einen Halbkreis; von A als Mittelpunkt beschreibe mit einem Halbmesser = b einen Kreisbogen, der den Halbkreis in D schneide; ziehe AD und BD und verlängere letzteres, bis es den ersten Kreisabschnitt in C schneide; endlich ziehe AC, so ist △ ACB das gesuchte.

Beweis. AB = a; ACB = α, da es Winkel in dem Kreisabschnitte ACB ist, der den Winkel α faßt; endlich ist ADB = 90° als Winkel im Halbkreise, also AD = b Perpendikel auf BC.

Zusatz. Wenn man den Halbkreis auf der entgegengesetzten Seite vom Kreisabschnitte beschreibt und im Uebrigen wie oben verfährt, so erhält man ein zweites Dreieck ABC',

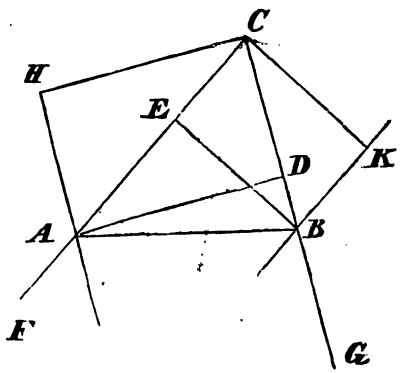
Digitized by Google

von welchem sich ebenfalls beweisen läßt, daß es die Bedingungen erfüllt.

III. Aufgabe.

Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist ein Winkel $= \alpha$ und die beiden zu den ihn einschließenden Seiten gehörigen Höhenperpendikel $= a$ und $= b$.

Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, von welchem gegeben sei ACB $= \alpha$ und wenn von A und B auf die Gegenseiten die Perpendikel AD, BE gefällt werden, AD $= a$, BE $= b$. Da ACB gegeben ist, so ist sowohl C als die Lage von AC und BC gegeben; da ferner A von BC um AD $= a$ entfernt ist,



so ist eine von BC um a entfernte Parallele mit BC der geometrische Ort für A, durch dessen Durchschnitt mit dem Schenkel AC der Punkt A gegeben ist; ebenso ist B durch den Durchschnitt des entsprechenden um b von AC entfernten Ortes mit dem Schenkel BC gegeben; folglich ist $\triangle$ ABC gegeben.

Konstruktion. Mache FCG $= \alpha$; in C errichte auf CG und CF die Perpendikel CH $= a$ und CK $= b$; durch H und K ziehe Parallelen mit CG und CF, bis sie CF und CG in A und B schneiden, und ziehe AB, so ist $\triangle$ ABC das gesuchte.

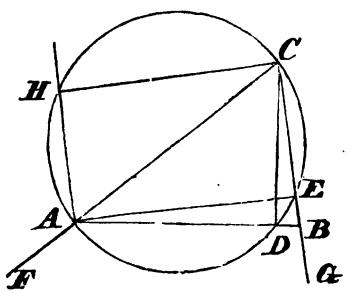
Beweis. ACB $= \alpha$; von A und B fälle auf BC und AC die Perpendikel AD und BE, so ist AD $\parallel$ HC, AH $\parallel$ CD, also AD $=$ HC $= a$; ebenso ist BE $=$ CK $= b$.

Digitized by Google

IV. Aufgabe.

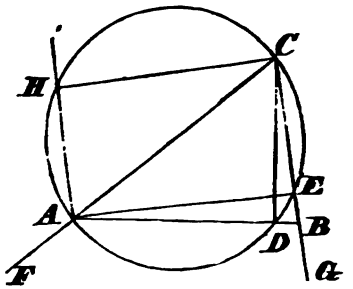
Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist ein Winkel = α, der zu der Gegenseite gehörige Höhenperpendikel = a und ein zu einer der einschließenden Seiten gehöriger Höhenperpendikel = b.

Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, in welchem gegeben sei ACB = α, der von C auf AB gefällte Perpendikel CD = a und der von A auf BC gefällte Perpendikel AE = b. Durch ACB ist sowohl C als die Richtung von AC und BC gegeben; durch AE eine um b von BC entfernte Parallele mit BC als Ort für A und also durch den Durchschnitt dieses Ortes mit AC der Punkt A; folglich ist AC gegeben; und daher weil ADC = 90° ist, ein Halbkreis über dem Durchmesser AC als Ort für D, da aber DC = a gegeben ist, ein vom Mittelpunkte C mit dem Halbmesser a beschriebener Kreisbogen als zweiter Ort; folglich ist durch den Durchschnitt beider Oerter D gegeben, also AD und durch dessen Verlängerung bis zum Durchschnitte mit dem Schenkel BC des Winkels ACB der Punkt B, mithin ist △ ABC gegeben.



Konstruktion. Mache FCG = α; auf CG errichte in C einen Perpendikel CH = b und ziehe durch H eine Parallele mit CG, bis sie CF in A trifft; auf AC als Durchmesser beschreibe einen Halbkreis und von C als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = a einen Kreisbogen, der den Halbkreis in D schneide; ziehe AD und verlängere es, bis es CG in B trifft; so ist △ ABC das gesuchte.

Digitized by Google



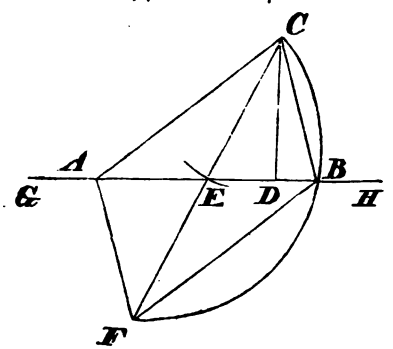
Beweis. Ziehe CD und fälle von A auf BC den Perpendikel AE. $ACB = \alpha$; da $ADC = 90°$ ist als Winkel im Halbkreise, so ist CD = a Perpendikel auf AB; endlich ist AE ⫽ CH und AH ∥ CE, also $AE = CH = b$.

Zusatz. Wenn man den Halbkreis auf die entgegengesetzte Seite von AC legt, so erhält man ein zweites Dreieck AB'C, welches ebenfalls den Bedingungen genügt, wie sich leicht beweisen läßt.

V. Aufgabe.

Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben sind ein Winkel = α, der zu der Gegenseite gehörige Perpendikel = a und die zu derselben Seite gehörige Mittellinie = b.

Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, in welchem $ACB = \alpha$, der von C auf AB gefällte Perpendikel CD = a und die von C nach dem Halbirungspunkte E von AB gezogene Mittellinie CE = b gegeben seien. Da in dem rechtwinkligen Dreiecke CDE die Hypotenuse CE und eine Kathete CD gegeben sind, so ist △ CDE gegeben, also sind die Punkte C, D, E gegeben. Verlängert man nun (nach der Seite 127 gemachten Bemerkung) CE so nach F, daß EF = CE wird, und zieht



Digitized by Google

BF, AF, wodurch ACBF ein Parallelogramm wird, so ist F gegeben und es ist FB ∥ AC, also CBF + ACB = 180°, oder CBF = 180° — ACB = 180° — α; folglich ist CBF gegeben und daher ein über CF als Chorde beschriebener Kreisabschnitt, der den Winkel 180° — α faßt, als Ort für B; folglich ist B durch den Durchschnitt von ED oder seiner Verlängerung mit diesem Ort gegeben; also ist EB und daher auch AE = EB gegeben; folglich ist auch A gegeben, und daher △ ABC.

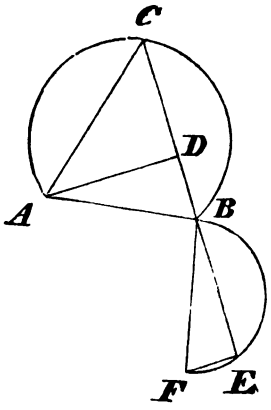
Konstruktion. Auf einer beliebigen geraden Linie GH errichte in einem beliebigen Punkte D einen Perpendikel DC = a; von C als Mittelpunkt beschreibe mit einem Halbmesser = b einen Kreisbogen, der GH in E schneide; ziehe CE und verlängere es so nach F, daß EF = CE wird; über CF beschreibe einen Kreisabschnitt, der einen Winkel faßt, welcher dem Nebenwinkel von α gleich ist; es schneide dieser Kreisabschnitt GH in B, so schneide von EG ein Stück EA = EB ab und ziehe CA, CB, so ist △ ABC das gesuchte.

Beweis. Da EA = EB, also AB in E halbirt ist, so ist CE = b die zu AB gehörige Mittellinie; da ferner CD auf AB senkrecht steht, so ist CD = a der zu AB gehörige Höhenperpendikel; endlich ziehe FB, so ist CBF Winkel in dem über CF beschriebenen Kreisabschnitte, also ist CBF = 180° — α; nun ist aber BE = AE, EF = CE und BEF = AEC, also △ BEF ≅ △ AEC und daher EFB = ACE, also FB ∥ AC und daher FBC + ACB = 180°; folglich ist ACB = α.

VI. Aufgabe.

Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben ist eine Seite = a, der ihr gegenüberliegende Winkel = α und die Summe einer zweiten Seite und des zu der letztern Seite gehörigen Höhenperpendikels = b.

Digitized by Google



Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, von welchem gegeben sei AB = a, ACB = α und, wenn von A auf BC der Perpendikel AD gefällt wird, BC + AD = b. Da AB gegeben ist, so sind die Punkte A und B gegeben; da ferner ACB gegeben ist, so ist ein über AB als Chorde beschriebener Kreisabschnitt, der den Winkel α faßt, als Ort für C gegeben; verlängere ferner BC über B so nach E, daß BE = AD wird, so ist CE = BC + AD = b gegeben; errichte in E auf BE einen Perpendikel EF = BD und ziehe BF, so ist $\triangle$ BEF $\cong$ $\triangle$ ABD, weil BE = AD, EF = BD und BEF = ADB = 90° ist; daher ist BF = AB = a; also ist BF gegeben; nun ist aber EBF = DAB, also EBF + ABD = DAB + ABD = 90°; folglich ist auch ABF = 90°, also ist auch die Lage von BF gegeben; daher ist F gegeben; folglich ist ein über BE als Durchmesser beschriebener Halbkreis als Ort für E gegeben. Die Aufgabe ist also auf die Seite 114 gelöste reduzirt: durch den Durchschnitt B der beiden Kreise ACB und BEF eine gerade Linie so hindurchzulegen, daß die Summe der in beiden Kreisen liegenden Chorden = b sei.

Konstruktion. Ueber AB = a beschreibe einen Kreisabschnitt, der den Winkel α faßt; auf AB errichte in B einen Perpendikel BF = a und beschreibe über BF als Durchmesser einen Halbkreis; hierauf lege nach Seite 114 durch B eine gerade Linie so, daß die Summe der in den Kreisabschnitt und in den Halbkreis fallenden Chorden = b sei; es sei CE diese Linie; ziehe AC, so ist $\triangle$ ABC das gesuchte.

Beweis. AB = a, ACB = α als Winkel in dem Kreisabschnitte ACB; ziehe endlich FE und fälle von A auf BC

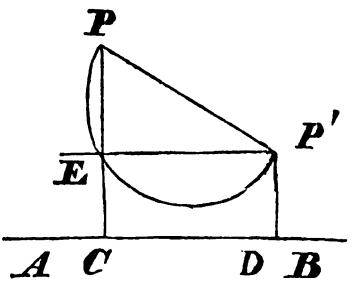
Digitized by Google

den Perpendikel AD; da ABF = 90° ist, so ist auch ABD + FBE = 90°; nun ist aber auch ABD + BAD = 90°; folglich ist FBE = BAD; da nun auch BEF = ADB = 90° und BF = AB ist, so ist △ BEF ≅ △ ABD und daher BE = AD; folglich ist BC + AD = BC + BE = b.

VII. Aufgabe.

Eine gerade Linie zu ziehen, welche die Eigenschaft hat, daß die von zwei gegebenen Punkten P und P′ auf sie gefällten Perpendikel gegebenen geraden Linien a und b gleich werden.

Analysis. Es sei AB die gesuchte gerade Linie, welche die Eigenschaft habe, daß, wenn von P und P′ auf AB die Perpendikel PC, P′D gefällt werden, PC = a, P′D = b sei; ziehe P′E ∥ AB, bis es PC in E schneide; da PC ∥ P′D und P′E ∥ CD ist, so ist EC = P′D = b; also ist PE = PC − EC = a − b;

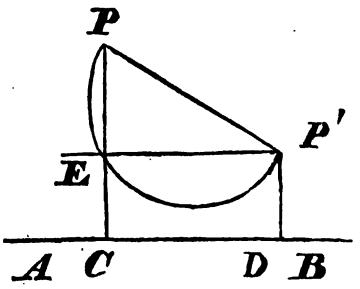


folglich ist PE gegeben; also der von P als Mittelpunkt mit einem Halbmesser a − b beschriebene Kreis als Ort für E; da ferner PEP′ = 90° ist, so ist auch der über PP′ als Durchmesser beschriebene Halbkreis ein Ort für E; also liegt E auf dem Durchschnitt beider Oerter; folglich ist E gegeben, also PE, also auch PC = a; folglich ist C gegeben und daher auch AB, da es auf PC in C senkrecht steht.

Konstruktion. Ueber PP′ als Durchmesser beschreibe einen Halbkreis; von P als Mittelpunkt beschreibe mit einem Halbmesser = a − b (oder b − a, je nachdem $a \gtrless b$ ist) einen Kreisbogen, der den Halbkreis in E schneide, ziehe PE und verlängere es so nach C, daß PC = a wird; auf PC

Digitized by Google

endlich errichte in C einen Perpendikel AB, so ist AB die gesuchte Linie.



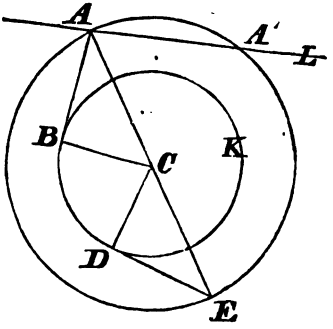
Beweis. Ziehe PE und fälle von P' auf AB den Perpendikel PD; da PEP' = 90° ist als Winkel im Halbkreise und auch PCB = 90°, so ist PE ‖ AB; ferner ist PD ‖ EC; folglich ist auch PD = EC; aber PC = a und PE = a — b; folglich ist EC = b; daher ist auch PD = b.

Zusatz. Es gibt vier gerade Linien, welche der Aufgabe entsprechen.

VIII. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie L einen Punkt zu suchen, der die Eigenschaft hat, daß die von ihm nach einem gegebenen Kreise K gezogene Tangente eine gegebene Größe = a habe.

Analysis. Es sei A der gesuchte Punkt auf L und daher die von A nach K gezogene Tangente AB = a; an den Mittelpunkt C des Kreises K ziehe BC und AC; da K gegeben ist, so ist auch BC gegeben; folglich sind in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC beide Katheten, also auch die Hypotenuse AC gegeben; folglich ist die Entfernung des Punktes A von C, also durch den von C als Mittelpunkt mit dieser Entfernung als Halbmesser beschriebenen



Digitized by Google

Kreis ein Ort für A und durch den Durchschnitt dieses Orts mit L endlich A selbst gegeben.

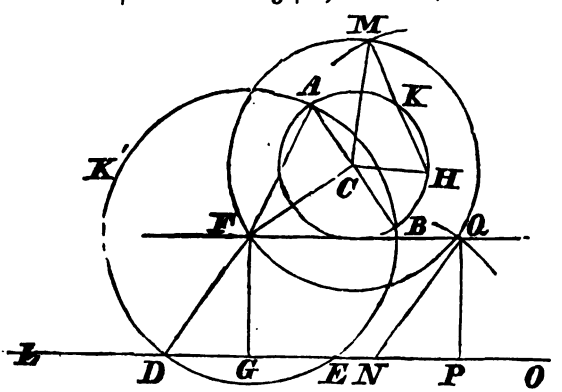
Konstruktion. In dem gegebenen Kreise K ziehe einen beliebigen Halbmesser CD und errichte auf CD in D einen Perpendikel DE = a; ziehe CE und beschreibe von C als Mittelpunkt mit CE als Halbmesser einen mit K konzentrischen Kreis, der L in A oder A′ schneide, so ist A der gesuchte Punkt.

Beweis. Von A ziehe an K die Tangente AB; ziehe ferner AC, BC; da AC = EC, BC = CD und die Dreiecke rechtwinklig sind, so ist △ ABC ≅ △ CDE, also AB = DE = a.

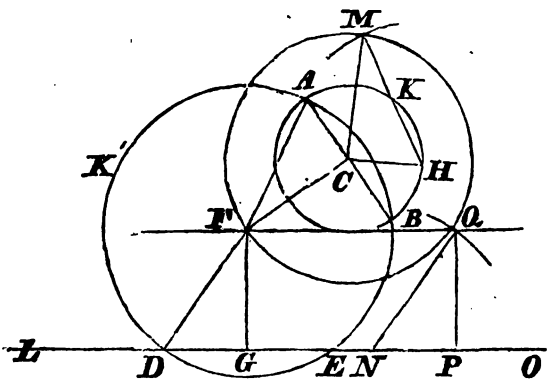
IX. Aufgabe.

Mit einem gegebenen Halbmesser = r einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Kreisperipherie K halbirt und von einer gegebenen geraden Linie L eine Chorde von gegebener Größe = a abschneidet.

Analysis. Es sei K′ der gesuchte Kreis, der den Kreis K halbire, d. h. in A und B so schneide, daß AB durch den Mittelpunkt C des Kreises K gehe; ferner schneide K′ von L eine Chorde DE ab, welche = a sei. Es sei F Mittelpunkt des Kreises K′, ziehe FA, FC, FD und fälle von F auf DE den Perpendikel FG; da AB in C halbirt und AB auch Chorde von K′ ist, so



Digitized by Google



ist FC Perpendikel auf AB, oder △ ACF ist rechtwinklig; nun ist in demselben AC als Halbmesser des Kreises K und AF = r gegeben; also ist △ ACF, folglich CF d. h. die Entfernung des Punktes F von C gegeben, und dadurch ein von C als Mittelpunkt mit dieser Entfernung als Halbmesser beschriebener Kreis als Ort für F. Ebenso ist DE durch FG halbirt; in dem rechtwinkligen Dreieck FDG ist also wieder FD = r, DG = $\frac{1}{2}$a, also auch FG, d. h. die Entfernung des Punktes F von L gegeben und dadurch eine in dieser Entfernung gezogene Parallele mit L als Ort für F. Daher ist F durch den Durchschnitt beider Oerter und somit, da auch r gegeben ist, der Kreis K′ selbst gegeben.

Konstruktion. Vom Mittelpunkte C des gegebenen Kreises K ziehe einen beliebigen Halbmesser CH; auf CH errichte in C einen Perpendikel und beschreibe von H als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = r einen Kreisbogen, der den Perpendikel in M schneide; von C als Mittelpunkt beschreibe mit dem Halbmesser CM einen dem Kreise K konzentrischen Kreis. Auf L schneide ferner beliebig NO = a ab und halbire es in P; errichte auf NO in P einen Perpendikel und beschreibe von N als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = r einen Kreisbogen, der den Perpendikel in Q treffe; durch Q ziehe eine Parallele mit L, welche den mit K konzentrischen Kreis in F oder F′ treffe, so ist F oder F′ der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Beschreibt man also z. B. von F als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = r den Kreis K′, so ist dieser der gesuchte.

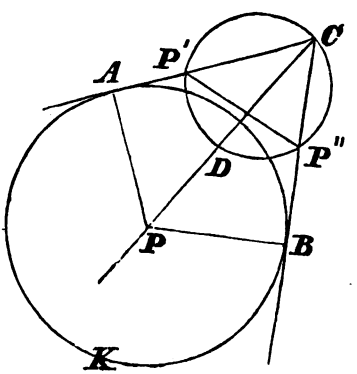
Digitized by Google

Beweis. Ziehe FC und ziehe durch C einen Durchmesser AB des Kreises K senkrecht auf FC, ziehe FA; so ist FC = CM, CA = CH, FCA = MCH = 90°; also ist △ ACF ≅ △ HCM und daher FA = HM = r; folglich geht der Kreis K′ durch A; ebenso wird bewiesen, daß er durch B geht; also schneidet er den Kreis K in den Endpunkten des Durchmessers AB oder er halbirt die Peripherie desselben. Ferner fälle von F auf L den Perpendikel FG; mache GD = GE = $^1/_2$a und ziehe FD, so ist FG = QP, GD = $^1/_2$a = NP, FGD = QPN = 90°; also ist △ FGD ≅ △ QPN und daher FD = QN = r; also geht der Kreis K auch durch D; ebenso wird endlich bewiesen, daß er auch durch E geht; also schneidet er von L eine Chorde DE = $^1/_2$ a + $^1/_2$ a = a ab.

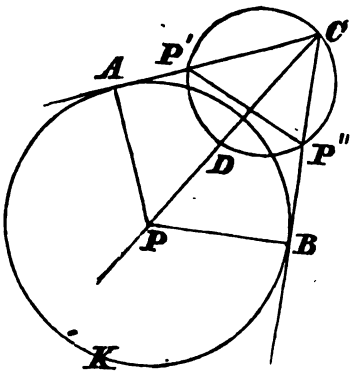
X. Aufgabe.

Von einem gegebenen Punkte P als Mittelpunkt aus einen Kreis zu beschreiben, der die Eigenschaft hat, daß die von zwei andern gegebenen Punkten P′ und P″ an ihn gezogenen Tangenten sich, wenns nöthig ist verlängert, unter einem gegebenen Winkel α schneiden.

Analysis. Es sei K der gesuchte von P als Mittelpunkt beschriebene Kreis, der die Eigenschaft habe, daß die von P′ und P″ an ihn gezogenen Tangenten P′A, P″B sich verlängert in C so schneiden, daß ACB = α sei. Da P′, P″, also auch P′P″ und P′CP″ = α gegeben sind, so ist ein über P′P″ beschriebener Kreisabschnitt, der den Winkel α faßt, als Ort für C gegeben; zieht man nun CP, welches den Ergänzungsbogen des Kreisabschnitts P′CP″ in D schneide, so ist ACB durch CP halbirt, oder



Digitized by Google



ACP ist = BCP; daher ist auch P'D = P''D, oder P'DP'' ist in D halbirt; da nun P'DP'' gegeben ist, so ist D, also auch PD, folglich durch den Durchschnitt seiner Verlängerung mit dem erstern Kreisabschnitte der Punkt C gegeben; daher ist CP', also auch der von P auf die Verlängerung von CP' gefällte Perpendikel PA als Halbmesser für den Kreis K gegeben; da nun auch der Mittelpunkt P dieses Kreises gegeben ist, so ist r gegeben.

Konstruktion. Ziehe P'P''; über P'P'' beschreibe einen Kreisabschnitt, der den Winkel α faßt, und ergänze denselben zum vollständigen Kreis. Den Ergänzungsbogen halbire in D, ziehe PD und verlängere es, bis es den Kreisabschnitt in C trifft; ziehe CP' und fälle von P auf CP' oder dessen Verlängerung einen Perpendikel PA; endlich beschreibe vom Mittelpunkt P mit dem Halbmesser PA einen Kreis K, so ist dieser der gesuchte.

Beweis. Ziehe CP'' und fälle von P auf CP'' oder dessen Verlängerung den Perpendikel PB. Da P'D = P''D ist, so ist auch P'CD = P''CD; da nun auch PC = PC und PAC = PBC = 90° ist, so ist $\triangle$ ACP $\cong$ $\triangle$ BCP und daher PA = PB; der Kreis K geht daher auch durch B und da P'A und P''B auf PA und PB senkrecht stehen, so sind sie Tangenten an den Kreis K. Endlich schneiden sich beide in C so, daß P'CP'' = α ist, weil es Peripheriewinkel in dem Kreisabschnitte ist.

Digitized by Google

Viertes Buch.

Lehre von den geometrischen Oertern.

---

1. Ort.

Die Peripherie des von einem gegebenen Punkte P als Mittelpunkt mit einer gegebenen begrenzten geraden Linie a als Halbmesser beschriebenen Kreises ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von P eine gegebene Entfernung = a haben.

Beweis folgt unmittelbar aus der Definition des Kreises.

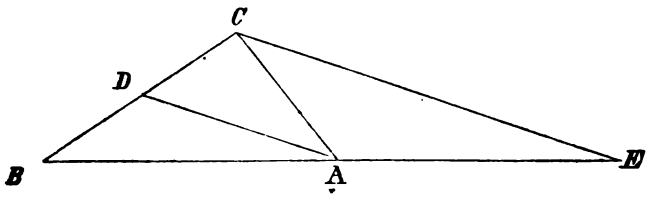
Zusatz 1. Andere Ausdrücke für den obigen Ort sind folgende:

1) Wenn von einer begrenzten geraden Linie a der eine Endpunkt P der Lage nach gegeben ist, so ist der geometrische Ort für den andern Endpunkt ein von P als Mittelpunkt mit dem Halbmesser a beschriebener Kreis;

2) die Peripherie eines von einem gegebenen Punkte P als Mittelpunkt mit einer gegebenen begrenzten geraden Linie als Halbmesser beschriebenen Kreises ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch P gehen und den Halbmesser a haben.

Digitized by Google

Zusatz 2. In △ ABC sei AD Mittellinie für die Seite BC; verlängert man AB über A hinaus so nach E, daß



AE = AB wird, und zieht EC, so ist, wie sich leicht beweisen läßt, EC ∥ AD und = 2AD, welche Form im Uebrigen auch △ ABC haben mag. Für die gegebene Größe von AB und AD ist daher die Entfernung des Punktes C von E konstant. Wenn daher von einem Dreiecke eine Seite AB und die zu einer der beiden andern Seiten gehörige Mittellinie AD gegeben sind, so ist der Ort für die der Seite AB gegenüberliegende Winkelspitze C eine nach Ort 1 konstruirbare Kreislinie.

2. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einer gegebenen geraden Linie L eine gegebene Entfernung = a haben, ist eine mit L parallele gerade Linie, welche durch den Endpunkt eines auf L in einem beliebigen Punkte errichteten Perpendikels gezogen wird, dessen Größe = a ist.

Beweis folgt aus dem bekannten Satze, daß Perpendikel zwischen Parallelen einander gleich sind.

Zusatz 1. Da der Perpendikel auf beiden Seiten von L errichtet werden kann, so gibt es zwei Oerter für den gesuchten Punkt.

Zusatz 2. Andere Ausdrücke des obigen Ortes sind folgende:

1) Eine durch den Endpunkt eines Perpendikels h auf einer begrenzten geraden Linie a gezogene Parallele mit a ist der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche a zur Grundlinie und h zur zugehörigen Höhe haben;

Digitized by Google

2) eine durch die Spitze A eines Dreiecks ABC parallel mit der Gegenseite BC gezogene gerade Linie ist der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche mit △ ABC die nemliche Grundlinie BC und gleichen Flächeninhalt haben;

3) der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser a haben und eine gegebene gerade Linie L berühren, ist eine Parallele mit L in einer Entfernung von L, welche = a ist;

4) ebenso der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche von L eine Chorde von gegebener Größe b abschneiden und einen Halbmesser = a haben. (Vergl. die Aufgabe Seite 193 Nr. IX). Nur ist hier die Entfernung der Parallele nicht = a, sondern gleich der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse = a und dessen andere Kathete die Hälfte der gegebenen Chorde ist. Diese Entfernung ist also $= \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2}$.

3. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen nach einer gegebenen geraden Linie L unter einem gegebenen Winkel α gezogenen geraden Linien eine gegebene Größe = a haben, ist eine Parallele mit L, welche dadurch gefunden wird, daß man an L in einem beliebigen Punkte eine gerade Linie = a unter einem Winkel = α anlegt und durch den Endpunkt derselben eine Parallele mit L zieht.

Beweis folgt unmittelbar aus dem bekannten Satze, daß Parallelen zwischen Parallelen einander gleich sind.

Zusatz 1. Der zweite Ort ist genau genommen ein spezieller Fall des dritten.

Zusatz 2. Ein anderer Ausdruck des dritten Ortes ist folgender: wenn eine der Größe nach gegebene gerade Linie = a den einen Endpunkt auf einer gegebenen geraden Linie L haben und einer gegebenen geraden Linie L′ parallel sein soll, so ist der geometrische Ort für den andern Endpunkt

Digitized by Google

eine Parallele mit L, deren Lage dadurch bestimmt wird, daß man durch irgend einen Punkt von L eine Parallele mit L, zieht, dieselbe = a macht und durch ihren andern Endpunkt eine Parallele mit L legt.

4. Ort.

Wenn eine der Größe nach gegebene gerade Linie = a den einen Endpunkt auf einem gegebenen Kreise K haben und einer gegebenen geraden Linie L parallel sein soll, so ist der geometrische Ort für den andern Endpunkt ein Kreis K', der dem Kreise K gleich ist und dessen Lage dadurch bestimmt wird, daß die Centrale beider Kreise = a und ∥ L werden muß.

Beweis folgt einfach aus der Kongruenz zweier rechtwinkliger Dreiecke und der Eigenschaft der Parallelogramme, daß die Gegenseiten einander gleich sind.

Zusatz 1. Schon der Ausdruck zeigt, daß der vierte Ort eine Analogie ist des dritten.

Zusatz 2. Da man die Centrale nach entgegengesetzten Seiten ziehen kann, so gibt es zwei Oerter.

5. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte welche von der Peripherie eines gegebenen Kreises K, dessen Halbmesser = r ist, eine gegebene Entfernung = a haben, ist ein mit K konzentrischer Kreis, dessen Halbmesser entweder r + a, oder auch r — a oder a — r ist, je nachdem in den beiden letzten Fällen $r \gtrless a$ ist.

Beweis folgt aus der Definition des Kreises, verbunden mit dem Satze, daß die Entfernungen eines Punktes von einer Kreisperipherie durch diejenigen geraden Linien gemessen werden, welche entweder selbst oder erst in der Verlängerung durch den Mittelpunkt gehen, wobei die erste die größte, die zweite die kleinste Entfernung angibt.

Digitized by Google

Zusatz 1. Ein anderer Ausdruck obigen Ortes ist: der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis K, dessen Halbmesser r ist, von Außen oder von Innen berühren und einen gegebenen Halbmesser a haben, ist die Peripherie eines mit K konzentrischen Kreises, dessen Halbmesser im ersten Falle $r + a$, im zweiten $r - a$ oder $a - r$ ist, je nachdem $r \gtrless a$ ist.

Zusatz 2. Ebenso läßt sich eine analoge Anwendung für obigen Ort finden, wie bei Ort 2, Zusatz 2, Nr. 4.

6. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten P und P′ gleichweit entfernt sind, ist der auf der Verbindungslinie der beiden Punkte in ihrem Halbirungspunkte errichtete Perpendikel.

Beweis folgt unmittelbar aus dem Satze über die Gleichheit der von einem Punkte auf diesem Perpendikel nach den Endpunkten der geraden Linie gezogenen geraden Linien.

Zusatz 1. Andere Ausdrücke dieses Ortes sind:

1) Der auf einer begrenzten geraden Linie a in ihrem Halbirungspunkte errichtete Perpendikel ist der geometrische Ort für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche a zur Basis haben;

2) der auf der Verbindungslinie zweier Punkte P und P′ in ihrem Halbirungspunkte errichtete Perpendikel ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch P und P′ hindurchgehen, also PP′ zur Chorde haben.

Zusatz 2. Damit hängt auch folgender Ort zusammen: Der geometrische Ort der Halbirungspunkte aller parallelen Chorden eines Kreises ist der Halbirungsperpendikel einer dieser Chorden.

7. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei gegebenen geraden Linien L und L′ gleichweit entfernt sind, ist,

Digitized by Google

wenn L und L′ einander parallel sind, die durch den Halbirungspunkt irgend eines zwischen beiden Parallelen gezogenen Perpendikels gehende Parallele mit L und L′, wenn aber L und L′ einander schneiden, die Halbirungslinie des Winkels, den beide mit einander machen, oder seines Nebenwinkels.

Beweis folgt leicht aus bekannten Sätzen.

Zusatz 1. Wenn die Linien einander schneiden, gibt es daher zwei geometrische Oerter.

Zusatz 2. Ein anderer Ausdruck dieses Ortes ist: die im Hauptsatze bezeichnete Linie ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche L und L′ berühren oder von L und L′ gleiche Chorden abschneiden.

Zusatz 3. Der Ort für alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkte P und einer gegebenen geraden Linie L gleichweit entfernt sind, ist kein elementargeometrischer, sondern eine der sogenannten Kegelschnittslinien, nemlich die Parabel. Eine ähnliche Kegelschnittslinie, die Hyperbel, ist ferner der Ort für alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkte P und einem gegebenen Kreise K gleichweit entfernt sind, da der Unterschied der Entfernungen eines solchen Punktes von dem Punkte P und dem Mittelpunkte des Kreises K gleich dem Halbmesser des Kreises, also von gegebener Größe ist. Ebenso, wenn gleiche Entfernung von L und K oder von K und K′ gefordert wird, so ist der dazu gehörige Ort im ersten Falle wieder eine Parabel, im zweiten eine Hyperbel.

Wenn ferner nach Punkten gefragt wird, bei denen die Summe oder Differenz der Entfernungen von P und P′, P und L, P und K, L und L′, L und K, K und K′ eine gegebene Größe = a haben soll, so führt dieß mit Ausnahme des vierten Falles (s. 8. Ort) auf Oerter, welche höhere krumme Linien bilden. Aufgaben also, welche derartige Bedingungen enthalten, können nicht durch Oerter gelöst werden. Ein Beispiel einer solchen Aufgabe s. S. 144.

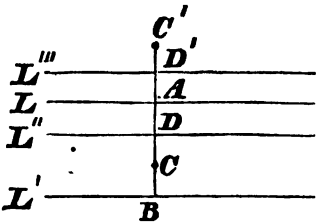
8. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Summe oder Differenz ihrer Entfernungen

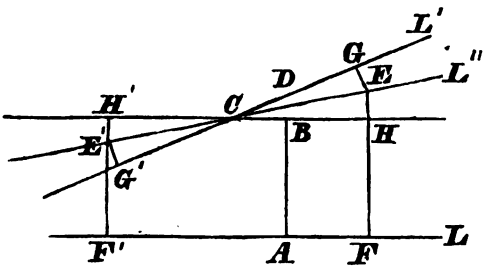
Digitized by Google

von zwei gegebenen geraden Linien L und L′ eine gegebene Größe = a habe, ist eine konstruirbare gerade Linie.

Konstruktion. 1) L und L′ seien parallel; von einem beliebigen Punkte A auf L fälle einen Perpendikel AB auf L′; schneide von ihm von B aus (oder von A aus) ein Stück BC oder BC′ = a ab, halbire CA oder C′A in D oder D′ und ziehe durch D oder D′ eine Parallele L″ oder L‴ mit L oder L′, so ist L″ oder L‴ der gesuchte Ort.



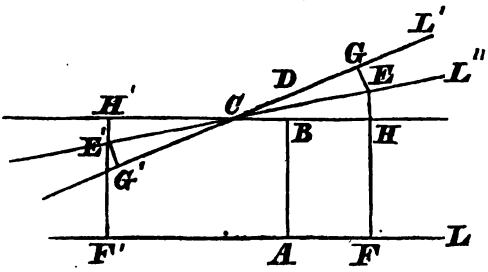
2) Wenn L und L′ nicht parallel sind, so errichte auf L (oder in ähnlicher Art auf L′) in einem beliebigen Punkte A einen Perpendikel AB = a und ziehe durch B eine Parallele mit L, welche L′ in C treffe; halbire den dadurch in C entstandenen Winkel BCD durch L″, so ist das zwischen L und L′ liegende Stück von L″ der Ort für die Punkte, bei denen die Differenz der Entfernungen von L und L′ = a ist, das nicht zwischen L und L′ liegende Stück von L″ aber der Ort für die Punkte, bei denen die Summe der Entfernungen von L und L′ = a ist.



Beweis. Zu 1). Wenn a < AB ist, also C zwischen L und L′ liegt, folglich auch L″ zwischen L und L′ fällt, so ist DA = DC, also DB — DA = DB — DC = BC = a; wenn dagegen a > AB ist, wie bei BC′ = a, so daß C′ außerhalb der Parallele liegt, so ist D′A = D′C′, also D′B + D′A = D′B + D′C′ = BC′ = a. Dasselbe gilt für jeden andern Punkt auf L″ und L‴.

Digitized by Google

Zu 2). Auf dem zwischen L und L′ liegenden Stücke von L″ nimm einen beliebigen Punkt E und fälle von ihm auf L und L′ die Perpendikel EF und EG, von denen der erste die durch B gezogene Parallele mit L in H schneide; nun ist EG = EH, weil E auf der Halbirungslinie des Winkels BCD liegt; also ist EF — EG = EF — EH = HF = BA = a. Nimmt man dagegen auf dem nicht zwischen L und L′ liegenden Stücke von L″ einen Punkt E′ und fällt von ihm auf L und L′ die Perpendikel E′F′ und E′G′, von denen der erste verlängert die durch B gezogene Parallele mit L in H′ schneide, so ist wieder E′G′ = E′H′, also E′F′ + E′G′ = E′F′ + E′H′ = F′H′ = BA = a.



Zusatz 1. Wenn L und L′ parallel sind, so darf die gegebene Summe der Entfernungen nicht kleiner sein als der von L auf L′ gefällte Perpendikel; ist sie diesem gleich, so hat jeder Punkt zwischen L und L′ die verlangte Eigenschaft, es gibt folglich keinen bestimmten Ort; ist sie dagegen kleiner als dieser Perpendikel, so ist die Forderung unmöglich. Umgekehrt darf die Differenz der Entfernungen nicht größer sein, als der bezeichnete Perpendikel; ist sie ihm gleich, so gibt es wieder keinen bestimmten Ort, vielmehr hat jeder außerhalb der Parallelen liegende Punkt die verlangte Eigenschaft; ist sie dagegen größer als dieser Perpendikel, so ist wieder die Aufgabe unmöglich.

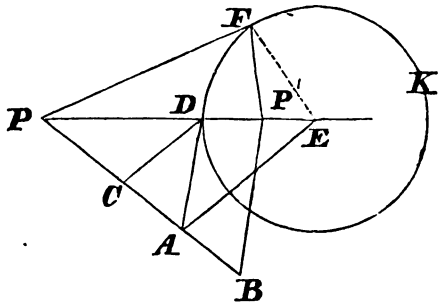
Zusatz 2. Man erhält stets einen zweiten Ort, wenn man die Konstruktion von L′ aus statt von L aus macht.

9. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten P und P′ ein gegebenes Verhältniß m : n haben, ist eine konstruirbare Kreislinie.

Digitized by Google

Konstruktion. Ziehe PP′, lege, wenn m > n ist, an PP′ in P eine gerade Linie PA = m unter einem beliebigen Winkel an, verlängere sie nach B so, daß AB = n wird und schneide zugleich von AP ebenso AC = n ab, ziehe BP′ und durch A eine Paralle mit BP′, welche PP′ in D schneide; ziehe CD und durch A eine Parallele mit CD, welche die Verlängerung von PP′ in E schneide; von E als Mittelpunkt beschreibe mit ED als Halbmesser einen Kreis K, so ist dieser der gesuchte Ort.



Beweis. Auf dem Kreise nimm einen beliebigen Punkt F, ziehe FP, FP′, FE, so ist zu beweisen, daß FP : FP′ = m : n sei. Nun ist PD : P′D = PA : AB = m : n und PE : ED = PA : AC = m : n, also ist PD : P′D = PE : ED, also PE : PE — PD = ED : ED — P′D, d. h. PE : ED = ED : EP′, oder weil ED = EF ist, PE : EF = EF : EP′; da nun auch PEF = FEP′ ist, so ist △ PEF ∽ △ FEP′ und daher FP : FP′ = PE : EF = PE : ED = PA : AC = m : n.

Zusatz 1. Ein anderer Ausdruck des Ortes ist: wenn von einem Dreiecke eine Seite und das Verhältniß der beiden andern Seiten gegeben ist, so ist der Ort für die jener Seite gegenüberliegende Winkelspitze eine konstruirbare Kreislinie.

Zusatz 2. Obiger Ort läßt sich auch auf folgende Art auffassen. Wenn von einem Dreiecke eine Seite und auf derselben ein Punkt gegeben ist, durch welchen die Halbirungslinie des Gegenwinkels hindurchgehen soll, so ist der Ort für die Spitze dieses Winkels eine konstruirbaren Kreislinie. Dieser Ausdruck beruht auf den Sätzen: wenn in einem Dreiecke ein Winkel halbirt wird, so wird die Gegenseite proportionirt den einschließenden Seiten getheilt; und umgekehrt: wenn in einem Dreiecke eine Seite proportionirt

Digitized by Google

den beiden andern Seiten getheilt wird, so wird der dieser Seite gegenüberliegende Winkel durch die vom Theilungspunkte nach der Winkelspitze gezogene gerade Linie halbirt.

Zusatz 3. Eine andere Konstruktion obigen Ortes ergibt sich auf folgende Weise: Wenn in der dazu gehörigen Figur der Punkt D dadurch bestimmt ist, daß PP' in D nach dem Verhältnisse von m : n getheilt wurde, so bestimme einen beliebigen Punkt F so, daß FP : FP' sich verhält wie PD : P'D, was dadurch geschieht, daß man zwei beliebige gerade Linien sucht, die sich verhalten wie m : n (z. B. PA : AB) und deren Summe größer ist als PP', und hierauf ein $\triangle$ FPP' konstruirt aus den drei Seiten PP', PA, AB. Zieht man nun DF und errichtet auf DF einen Halbirungsperpendikel, welcher PP' verlängert in E schneide, so ist E Mittelpunkt und ED Halbmesser des gesuchten Orts.

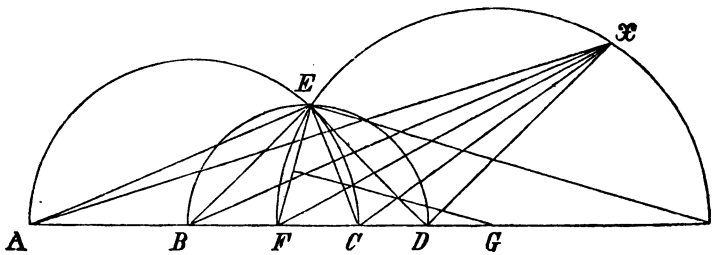
Zusatz 4. Wenn das Verhältniß der von dem gesuchten Punkte nach P und P' gezogenen geraden Linien gleich dem Verhältnisse zweier Quadrate, also $= m^2 : n^2$ ist, so ist der Ort für den gesuchten Punkt ebenfalls die, wie oben, zu konstruirende Kreislinie; denn sucht man zuerst zu m und n eine dritte Proportionallinie p, so daß $m : n = n : p$ ist, so ist $m^2 : n^2 = m : p$ und statt des Verhältnisses $m^2 : n^2$ ist daher das Verhältniß m : p gegeben, mit welchem wie oben verfahren wird.

Zusatz 5. Ebenso wenn das Verhältniß der Quadrate der beiden von dem gesuchten Punkte nach P und P' gezogenen geraden Linien = m : n sein soll, so suche zu m und n die mittlere Proportionale q, so ist $m : q : n$, also $m^2 : q^2 = m : n$; also verhalten sich die Quadrate beider gesuchten Linien wie $m^2 : q^2$, die Linien selbst also wie m : q, daher ist auch hier der gesuchte Ort die nach dem Obigen zu konstruirende Kreislinie.

Zusatz 6. Ist $m = n$, so wird PP' in D halbirt. Da nun aber auch ED : EP' = m : n werden, also ED = EP' werden muß, oder was einerlei ist, da C auf P, also CD auf PD fallen, also AE $\parallel$ PP' werden muß, so liegt E in unendlicher Entfernung von P' auf PP'; der gesuchte Kreis erhält somit einen unendlich großen Halbmesser oder geht in eine gerade Linie über, welche auf PP' im Halbirungspunkte D senkrecht steht. Dadurch erscheint der 6te Ort als ein besonderer Fall des 9ten.

Digitized by Google

Zusatz 7. Eine schöne Anwendung des Ortes 9 und zwar der in Zusatz 2 gegebenen Auffassung desselben ist folgende: Wenn vier Punkte A, B, C, D auf einer geraden



Linie gegeben sind und es soll ein Punkt X gefunden werden, der die Eigenschaft hat, daß, wenn von ihm nach jenen Punkten gerade Linien gezogen werden, die Winkel AXB und CXD einander gleich sind, so ist der Ort für den Punkt X eine konstruirbare Kreislinie. Es ergibt sich nemlich folgende Konstruktion (analog der in Zusatz 3 entwickelten): Ueber AC und BD beschreibe Halbkreise, die sich in E schneiden, ziehe BE und CE, halbire BEC durch EF; auf EF errichte einen Halbirungsperpendikel, der BC verlängert in G schneide, und beschreibe von G als Mittelpunkt mit GF als Halbmesser einen Kreis, so ist dieser der gesuchte Ort. Denn zieht man EA, ED, so ist AEC = BED = 90° und BEF = CEF (nach der Konstruktion), also auch AEC — CEF = BED — BEF, d. h. AEF = DEF . EF ist daher die Halbirungslinie sowohl für den Winkel BEC als auch für den Winkel AED; konstuirt man daher nach Zusatz 3, so ist der konstruirte Kreis sowohl der gesuchte Ort in Beziehung auf △ EAD, als auch auf △ EBC. Nimmt man folglich auf demselben einen beliebigen Punkt X und zieht XA, XB, XC, XD, so ist AXF = DXF und BXF = CXF, also AXF — BXF = DXF — CXF, d. h. AXB = CXD.

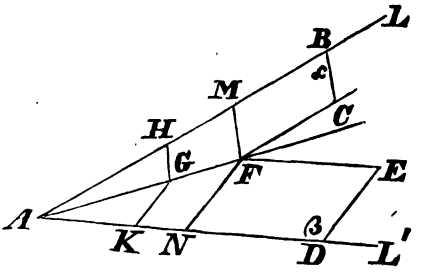
Zusatz 8. Liegen die vier Punkte A, B, C, D nicht in gerader Linie, so erhält man im Allgemeinen eine höhere krumme Linie als Ort für die gesuchten Punkte mit der verlangten Eigenschaft.

Digitized by Google

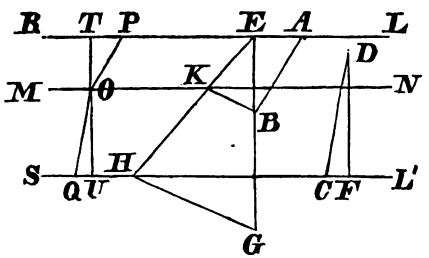
10. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen nach zwei gegebenen geraden Linien L und L′ unter gegebenen Winkeln α und β gezogenen geraden Linien sich wie m : n verhalten, ist eine konstruirbare gerade Linie.

Konstruktion. 1) L und L′ schneiden einander in A; an L lege in einem beliebigen Punkte B und unter einem Winkel = α eine Linie BC = m und ebenso lege an L′ in einem beliebigen Punkte D und unter einem Winkel = β eine Linie DE = n an, durch C und E ziehe Parallelen mit L und L′, bis sie sich in F schneiden; ziehe endlich AF, so ist AF und dessen Verlängerung der gesuchte Ort.



2) L und L′ seien einander parallel; an L lege in einem beliebigen Punkte A unter dem Winkel α eine gerade Linie AB = m an, ebenso an L′ in einem beliebigen Punkte C unter dem Winkel β eine gerade Linie CD = n; von B und D fälle auf L und L′ die Perpendikel BE, DF, verlängere BE so nach G, daß BG = DF wird, von E ziehe eine beliebige gerade Linie EH nach L, ziehe GH und durch B eine gerade Linie BK ‖ GH, bis sie EH in K trifft; endlich ziehe durch K eine Parallele MN mit L und L′, so ist MN der gesuchte Ort.



Digitized by Google

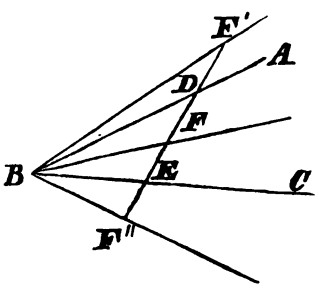
Beweis. Im ersten Falle nimm auf AF einen beliebigen Punkt G und ziehe GH ‖ CB nach L und GK ‖ ED nach L', so ist GHA = CBA = α und GKA = EDA = β; ferner ziehe durch F die Linie FM ‖ BC und FN ‖ ED nach L und L', so sind FCBM und FEDN Parallelogramme und daher FM = CB = m und FN = ED = n; nun ist GH : FM = AG : AF = GK : FN; also ist auch GH : GK = FM : FN = m : n.

Im zweiten Falle nimm auf MN einen beliebigen Punkt O und ziehe von O nach L und L' die Linien OP ‖ AB und OQ ‖ DC, so ist OPR = BAE = α, OQS = DCH = β; ferner fälle von O auf L den Perpendikel OT und verlängere ihn, bis er L' in U schneidet, so steht auch OU auf L' senkrecht; daher ist △ OPT ∽ △ BEA und △ OUQ ∽ △ DFC; also TO : BE = OP : BA und OU : DF = OQ : DC. Nun ist OT : OU = KE : KH = BE : BG = BE : DF; also OT : BE = OU : DF; also ist auch OP : BA = OQ : DC und daher OP : OQ = BA : DC = m : n.

Zusatz 1. In beiden Fällen erhält man noch einen zweiten Ort, wenn man m oder n auf die entgegengesetzte Seite von L oder L' legt.

Zusatz 2. Wenn α und $\beta = 90^0$ sind, so erhält man den Ort für alle Punkte, deren Entfernungen von L und L' ein gegebenes Verhältniß = m : n haben. Ist m = n, so erscheint der Ort 7 als ein spezieller Fall des allgemeinen Ortes 10.

Zusatz 3. Theilt man eine zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels ABC gegebene gerade Linie DE in F nach einem gegebenen Verhältnisse m : n und zieht BF, so ist BF und dessen Verlängerung der geometrische Ort für alle Punkte, in welchen die zwischen den Schenkeln des Winkels ABC liegenden Parallelen mit DE im Verhältnisse von m : n getheilt werden.



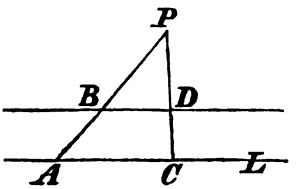
Digitized by Google

Zusatz 4. Einen ähnlichen Ort erhält man, wenn man DE so über D oder E hinaus nach F' oder F'' verlängert, daß F'E : F'D = m : n oder F''D : F''E = m : n ist, und BF' oder BF'' zieht.

Zusatz 5. Ebenso erhält man ähnliche Oerter in Beziehung auf zwei gerade Linien, welche nicht wie AB und BC einen Winkel bilden, sondern einander parallel sind.

11. Ort.

Der geometrische Ort für die Theilungspunkte aller von einem gegebenen Punkte P nach einer gegebenen geraden Linie L gezogenen geraden Linien, welche nach einem gegebenen Verhältnisse m : n getheilt sind, ist eine konstruirbare Parallele mit L.



Konstruktion. Von P ziehe eine beliebige gerade Linie PA nach L, theile PA in B so, daß PB : BA = m : n ist, und ziehe durch B eine Parallele mit L, so ist diese der gesuchte Ort.

Beweis. Von P ziehe eine beliebige gerade Linie PC nach L, welche die durch B gehende Parallele in D schneide, so ist PD : DC = PB : BA = m : n.

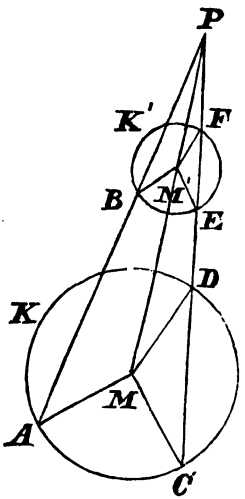
Zusatz. Aehnliche Oerter erhält man, wenn man PA über A oder P hinaus so nach B' verlängern soll, daß sich PB' : PA = m : n verhalte.

12. Ort.

Der geometrische Ort für die Theilungspunkte aller von einem gegebenen Punkte P nach einem gegebenen Kreise K gezogenen geraden Linien, welche nach einem gegebenen Verhältnisse m : n getheilt sind, ist eine konstruirbare Kreislinie K'.

Digitized by Google

Konstruktion. Es sei M der Mittelpunkt des Kreises K, ziehe PM und theile es in M′ so, daß PM′ : M′M = m : n ist; ferner ziehe von P an einen beliebigen Punkt A des Kreises K die gerade Linie PA und durch M′ eine Linie M′B ∥ MA, bis sie PA in B trifft; endlich beschreibe von M′ als Mittelpunkt mit M′B als Halbmesser einen Kreis K′, so ist dieser der gesuchte.



Beweis. Von P ziehe an den Kreis K eine beliebige Sekante, welche K in C und D schneide; ziehe MC, MD und durch M′ Parallelen mit MC und MD, welche PC in E und F schneiden; da M′E ∥ MC ist, so ist PE : EC = PM′ : M′M = m : n; ferner ist MC : M′E = PM : PM′ = MA : M′B; aber MC = MA; also ist auch M′E = M′B, d. h. E liegt auf der Peripherie von K′. Auf gleiche Art wird bewiesen, daß PD in F so getheilt ist, daß PF : FD = m : n ist und daß F auf dem Kreise K′ liegt.

Zusatz 1. Aehnliche Oerter erhält man, wenn PM über P oder M hinaus so nach M″ verlängert werden soll, daß PM″ : PM = m : n wird.

Zusatz 2. Eine von P an den Kreis K gezogene Tangente ist zugleich Tangente an K′.

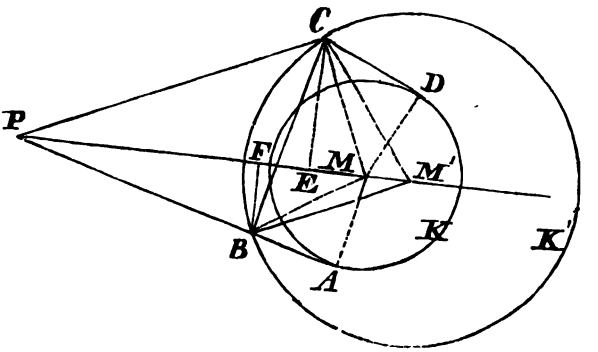
Zusatz 3. Liegt P auf der Peripherie von K, so sind alle von P an einen Punkt von K gezogenen geraden Linien Chorden an K; der obige Ort kann also für diesen besondern Fall so ausgedrückt werden: der geometrische Ort für die Theilungspunkte aller von einem gegebenen Punkte P auf der Peripherie eines Kreises K in diesem Kreise gezogenen Chorden, welche nach einem gegebenen Verhältnisse m : n getheilt sind, ist eine nach dem Obigen konstruirbare Kreislinie K′.

Digitized by Google

13. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen nach einem gegebenen Punkte P gezogene gerade Linie zu der nach einem gegebenen Kreise K gezogenen Tangente ein gegebenes Verhältniß = m : n habe, ist eine konstruirbare Kreislinie.

Konstruktion. Von P ziehe an K die Tangente PA



und theile sie in B so, daß BP : BA = m : n ist. Zu m und n suche die dritte Proportionale p, so daß m : n : p ist, ziehe PM und verlängere es so nach M', daß PM' : MM' = m : p ist; ziehe M'B und beschreibe von M' als Mittelpunkt mit M'B als Halbmesser einen Kreis K', so ist dieser der gesuchte Ort.

Beweis. Auf K' nimm einen beliebigen Punkt C, ziehe CP und von C an K die Tangente CD; ferner ziehe MD, MA, MB, MC, M'C und fälle von C und B auf PM' die Perpendikel CE, BF. Nun ist

in △ PCM' $CP^2 = CM'^2 + PM'^2 - 2PM' \cdot EM'$,
in △ PBM' $BP^2 = BM'^2 + PM'^2 - 2PM' \cdot FM'$,
in △ MCM' $CM^2 = CM'^2 + MM'^2 - 2MM' \cdot EM'$,
in △ MBM' $BM^2 = BM'^2 + MM'^2 - 2MM' \cdot FM'$;

folglich ist $CP^2 - BP^2 = 2PM' (FM' - EM') = 2PM' \cdot EF$ und ebenso $CM^2 - BM^2 = 2MM' (FM' - EM') = 2MM' \cdot EF$;

Digitized by Google

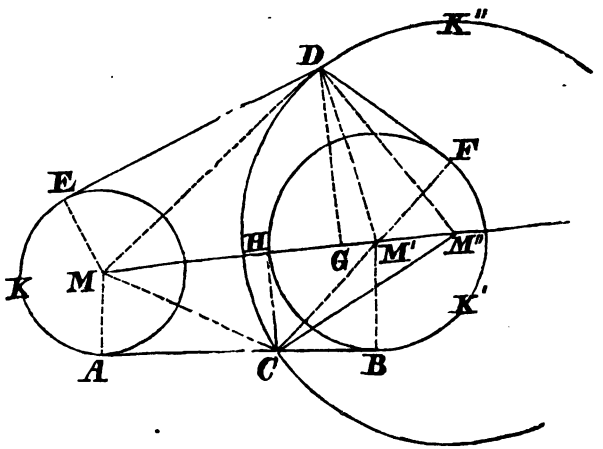
daher ist $CP^2 - BP^2 : CM^2 - BM^2 = 2PM' . EF : 2MM' . EF = PM' : MM'$; aber $CM^2 - BM^2 = (CD^2 + MD^2) - (BA^2 + MA^2) = CD^2 - BA^2$ (weil MD = MA ist) und $PM' : MM' = m : p$, oder weil $m : n : p$, also $m : p = m^2 : n^2$ ist, auch $PM' : MM' = m^2 : n^2$; es verwandelt sich daher die erhaltene Proportion in folgende: $CP^2 - BP^2 : CD^2 - BA^2 = m^2 : n^2$; nun ist aber $BP : BA = m : n$, also $BP^2 : BA^2 = m^2 : n^2$; also ist $CP^2 - BP^2 : CD^2 - BA^2 = BP^2 : BA^2$ und daher $CP^2 - BP^2 + BP^2 : CD^2 - BA^2 + BA^2 = BP^2 : BA^2$, d. h. $CP^2 : CD^2 = BP^2 : BA^2$; daher ist $CP : CD = BP : BA = m : n$.

Zusatz. Es bleibt dem Schüler überlassen, durch eine nach der Analogie gebildete Analysis zu untersuchen, was geschehen muß, wenn $m < n$ ist oder wenn P innerhalb K liegt.

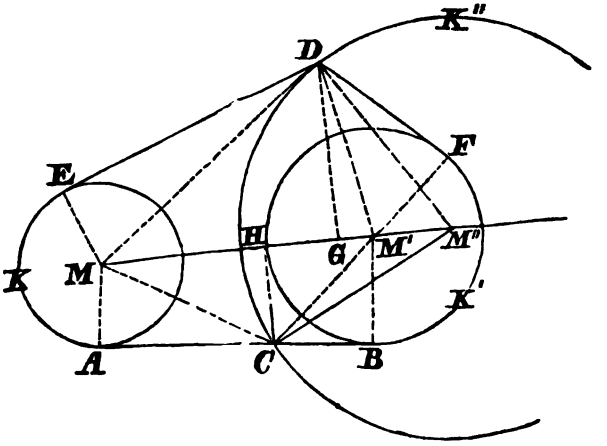
14. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen nach zwei gegebenen Kreisen K und K' gezogenen Tangenten ein gegebenes Verhältniß $= m : n$ haben, ist eine konstruirbare Kreislinie.

Konstruktion. An die beiden Kreise K und K' ziehe



Digitized by Google



die gemeinschaftliche Tangente AB, theile dieselbe in C so, daß CA : CB = m : n ist; ziehe die Centrale MM'; suche wieder zu m und n die dritte Proportionale p, so daß m : n : p ist, und verlängere MM' so nach M'', daß MM'' : M'M'' = m : p ist; ziehe endlich M''C und beschreibe von M'' als Mittelpunkt mit M''C als Halbmesser einen Kreis K'', so ist dieser der gesuchte Ort.

Beweis. Auf K'' nimm einen beliebigen Punkt D und ziehe von ihm an K und K' die Tangenten DE, DF; ferner ziehe DM, DM', DM'', CM, CM', EM, AM, FM', BM' und fälle von D und C auf MM' die Perpendikel DG, CH, so ist wieder wie im vorigen Satze

$DM^2 = DM''^2 + MM''^2 - 2MM'' \cdot GM''$,
$CM^2 = CM''^2 + MM''^2 - 2MM'' \cdot HM''$,
$DM'^2 = DM''^2 + M'M''^2 - 2M'M'' \cdot GM''$,
$CM'^2 = CM''^2 + M'M''^2 - 2M'M'' \cdot HM''$; also
$DM^2 - CM^2 = 2MM''(HM'' - GM'') = 2MM'' \cdot GH$ und
$DM'^2 - CM'^2 = 2M'M''(HM'' - GM'') = 2M'M'' \cdot GH$;
daher $DM^2 - CM^2 : DM'^2 - CM'^2 = 2MM'' \cdot GH : 2M'M'' \cdot GH = MM'' : M'M''$. Nun ist $DM^2 - CM^2 = (DM^2 - EM^2) - (CM^2 - AM^2) = DE^2 - CA^2$ und ebenso $DM'^2 - CM'^2 = DF^2 - CB^2$; ferner ist $MM'' : M'M'' =$

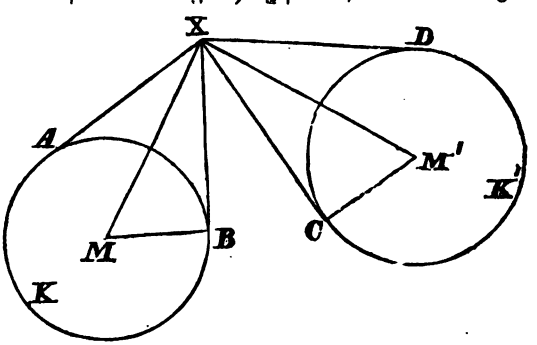
Digitized by Google

$m : p = m^2 : n^2$, weil $m : n : p$, also $m^2 : n^2 = m : p$ ist; die obige Proportion geht also über in folgende: $DE^2 - CA^2 : DF^2 - CB^2 = m^2 : n^2$; nun ist aber $CA : CB = m : n$, also $CA^2 : CB^2 = m^2 : n^2$; folglich ist $DE^2 - CA^2 : DF^2 - CB^2 = CA^2 : CB^2$, also $DE^2 - CA^2 + CA^2 : DF^2 - CB^2 + CB^2 = CA^2 : CB^2$, d. h. $DE^2 : DF^2 = CA^2 : CB^2$; also ist auch $DE : DF = CA : CB = m : n$.

15. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen an zwei gegebene Kreise K und K′ gezogenen Tangentenpaare gleiche Winkel bilden, ist eine konstruirbare Kreislinie.

Beweis. Es sei X ein solcher Punkt, der die Eigenschaft habe, daß, wenn man von ihm an K die Tangenten XA, XB und an K′ die Tangenten XC, XD ziehe, $AXB = CXD$ sei, so ist, wenn an die Mittelpunkte M und M′ der beiden Kreise die geraden Linien XM, XM′ gezogen werden, welche die Winkel AXB, CXD halbiren, auch $MXB = M'XC$ und daher, wenn MB, M′C gezogen werden, weil auch $XBM = XCM = 90°$ ist, $\triangle XBM \sim \triangle XCM'$, also $XM : XM' = MB : M'C = r : r'$, wenn die Halbmesser von K und K′ mit r und r′ bezeichnet werden; also ist das Verhältniß der Entfernungen des Punktes X von M und M′ gegeben; folglich ist der Ort für X eine nach Ort 9 konstruirbare Kreislinie.

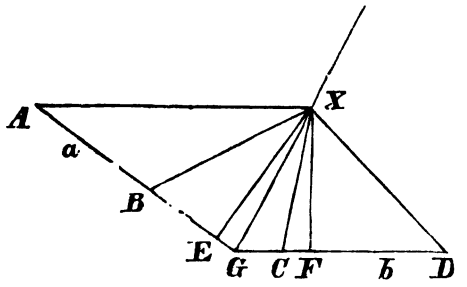


Digitized by Google

16. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen nach den Endpunkten zweier der Größe und Lage nach gegebenen geraden Linien a und b gezogenen geraden Linien auf a und b gleiche Dreiecke bilden, ist eine konstruirbare gerade Linie.

Beweis. Es sei X ein solcher Punkt, der die Eigenschaft habe, daß wenn man von ihm an die Endpunkte A und B von a und an die Endpunkte C und D von b die geraden Linien XA, XB, XC, XD ziehe, $\triangle XAB = \triangle XCD$ werde; von X fälle auf AB, CD oder deren Verlängerungen die Perpendikel XE, XF, so ist $\triangle XAB = {}^1/_2 AB \cdot XE$ und $\triangle XCD = {}^1/_2 CD \cdot XF$; also ist ${}^1/_2 AB \cdot XE = {}^1/_2 CD \cdot XF$, folglich auch $AB \cdot XE = CD \cdot XF$ und daher $XE : XF = CD : AB$; also ist das Verhältniß der von X auf AB und CD oder deren Verlängerungen gefällten Perpendikel gegeben; folglich ist der Ort für X eine nach Ort 10 konstruirbare, durch den Durchschnittspunkt G der Linien AB und CD gehende (oder wenn AB ∥ CD ist, mit beiden parallele) gerade Linie.

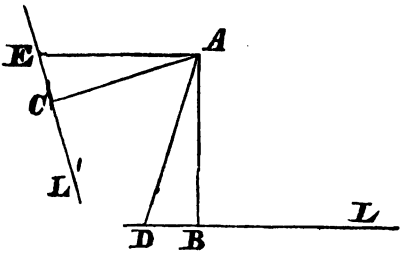


17. Ort.

Wenn die Spitze eines der Größe nach gegebenen Winkels α der Lage nach, sowie das Verhältniß der beiden Schenkel $= m : n$ gegeben ist, und wenn der Endpunkt des einen Schenkels auf einer gegebenen geraden Linie L liegen soll, so ist der geometrische Ort für den Endpunkt des andern Schenkels eine konstruirbare gerade Linie L'.

Digitized by Google

Konstruktion. Es sei A die gegebene Spitze des Winkels α, so fälle von A auf L den Perpendikel AB; an AB lege in A einen Winkel BAC $= \alpha$, und mache AC so groß, daß AB : AC $=$ m : n ist; endlich errichte auf AC in C einen Perpendikel L', so ist dieser der gesuchte Ort.

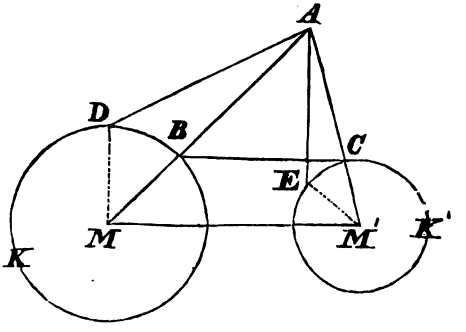


Beweis. Von A ziehe nach L eine beliebige gerade Linie AD, lege an AD in A einen Winkel DAE $= \alpha$, dessen zweiter Schenkel L' in E treffe. Da DAE $= \alpha =$ BAC ist, so ist DAE — DAC $=$ BAC — DAC, d. h. CAE $=$ BAD; nun ist auch ACE $=$ ABD $= 90^0$; daher ist $\triangle$ ACE $\sim$ $\triangle$ ABD und daher AD : AE $=$ AB : AC $=$ m : n.

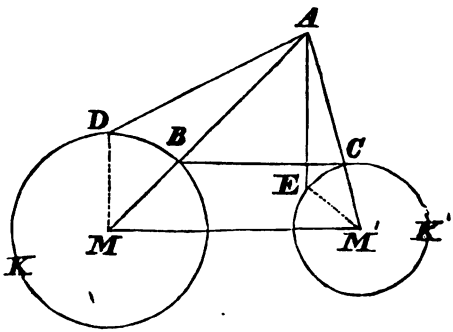
18. Ort.

Wenn die Spitze eines der Größe nach gegebenen Winkels α der Lage nach, so wie das Verhältniß der beiden Schenkel $=$ m : n gegeben ist und wenn der Endpunkt des einen Schenkels auf einer gegebenen Kreislinie K liegen soll, so ist der geometrische Ort für den Endpunkt des andern Schenkels eine konstruirbare Kreislinie K'.

Konstruktion. Es sei A die gegebene Spitze des Winkels α, so ziehe von A nach dem Mittelpunkte M des gegebenen Kreises K eine gerade Linie AM, lege an AM in A einen Winkel MAM' $= \alpha$, und mache den Schenkel AM' so groß, daß



Digitized by Google



$AM : AM' = m : n$ ist; durch den Punkt B, in welchem AM den Kreis K schneide, ziehe eine Parallele mit MM', bis diese AM' in C schneide, und beschreibe von M' als Mittelpunkt mit M'C als Halbmesser einen Kreis K', so ist dieser der gesuchte geometrische Ort.

Beweis. Von A ziehe nach K eine beliebige gerade Linie AD, ziehe MD; lege an CM' in M' einen Winkel $CM'E = BMD$ und ziehe AE, so ist $BM : CM' = AM : AM'$; also auch $DM : EM' = AM : AM'$; da nun auch $AMD = AM'E$ ist, so ist $\triangle AMD \sim \triangle AM'E$ und daher auch $AD : AE = AM : AM' = m : n$; es ist aber auch $DAM = EAM'$ und daher $DAM + MAE = EA'M + MAE$, d. h. $DAE = MAM' = \alpha$.

Zusatz 1. Konstruktion und Beweis bleiben dieselben, wenn A innerhalb oder auf der Peripherie von K gegeben ist.

Zusatz 2. Einen analogen Ort erhält man, wenn $\alpha = 0$ oder $= 180^0$ ist. Es ist dieß der Ort 12, der somit als besonderer Fall von Ort 18 erscheint.

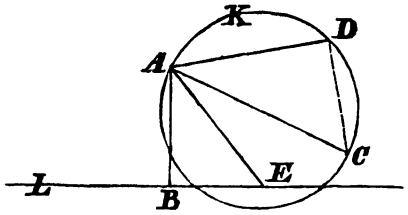
19. Ort.

Wenn die Spitze A eines der Größe nach gegebenen Winkels α der Lage nach, so wie das Rechteck aus den Schenkeln des Winkels $= a^2$ der Größe nach gegeben ist und wenn der Endpunkt des einen Schenkels auf einer gegebenen geraden Linie L liegen soll, so ist der Ort für den Endpunkt des andern Schenkels eine konstruirbare, durch die Spitze A des Winkels hindurchgehende Kreislinie K, und ebenso umgekehrt, wenn

Digitized by Google

der Endpunkt des einen Schenkels auf einer durch die Spitze A des Winkels hindurchgehenden Kreislinie liegen soll, so ist der Ort für den Endpunkt des andern Schenkels eine konstruirbare gerade Linie L.

Konstruktion. 1) Es sei L gegeben; fälle von A auf L einen Perpendikel AB, an AB lege in A einen Winkel BAC = α und mache AC so groß, daß AB . AC = a^2 wird (d. h. mache AC gleich der dritten Proportionallinie zu AB und a); endlich beschreibe über AC als Durchmesser einen Kreis K, so ist dieser der gesuchte Ort.



2) Es sei K gegeben und die Spitze A des Winkels α liege auf K; von A ziehe den Durchmesser AC; an AC lege einen Winkel CAB = α und mache AB so groß, daß AC . AB = a^2 (oder AC : a : AB) wird; auf AB endlich errichte in B einen Perpendikel L, so ist L der gesuchte Ort.

Beweis. Von A ziehe in K eine beliebige Chorde AD, an AD lege in A einen Winkel DAE = α, dessen Schenkel L in E treffe, so ist DAE = BAC, also DAE — EAC = BAC — EAC, d. h. DAC = EAB; zieht man nun noch DC, so ist auch ADC = ABE = 90°; daher ist $\triangle$ ACD $\sim$ $\triangle$ AEB; folglich ist AD : AB = AC : AE und daher AD . AE = AB . AC = a^2.

Zusatz 1. Wenn L gegeben ist, so gibt es zwei Kreise K, je nachdem α an AB auf die eine oder andere Seite gelegt wird; auf ähnliche Art gibt es, wenn K gegeben ist, zwei gerade Linien L.

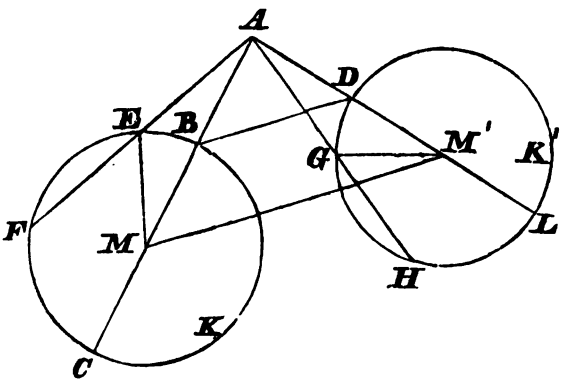
Zusatz 2. Ganz analog erhält man zwei reziproke Oerter K aus L, oder L aus K, wenn α = o oder = 180° ist, d. h, wenn die Punkte A, B, C, oder A, E, D auf einer geraden Linie und B und C, D und E entweder auf der nemlichen Seite oder auf entgegengesetzten Seiten von A aus liegen sollen.

Digitized by Google

20. Ort.

Wenn die Spitze A eines der Größe nach gegebenen Winkels α der Lage nach, so wie das Rechteck aus den Schenkeln des Winkels $= a^2$ der Größe nach gegeben ist und wenn der Endpunkt des einen Schenkels auf einer durch die Spitze A des Winkels nicht hindurchgehenden Kreislinie K liegen soll, so ist der Ort für den Endpunkt des andern Schenkels eine konstruirbare Kreislinie K'.

Konstruktion. Von A ziehe an den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises K die gerade Linie AM, welche K in B und verlängert in C schneide; an MA lege in A einen Winkel $MAD = \alpha$ an und mache AD so groß, daß $AC \cdot AD = a^2$ (d. h. AC : a : AD) ist; ziehe BD und durch M eine Parallele mit BD, welche die Verlängerung von AD in M' schneide; endlich beschreibe von M' als Mittelpunkt mit M'D als Halbmesser einen Kreis K', so ist K' der gesuchte Ort.



Beweis. Von A ziehe durch K eine beliebige Sekante, welche K in E und F schneide, an DM' lege in M' einen Winkel DM'G = BME, ziehe AG und verlängere es, bis es den Kreis K' noch einmal in H schneidet; endlich verlängere auch AM', bis es K' noch einmal in L trifft. Da BD ∥ MM' ist, so ist AM : BM = AM' : DM', also auch AM + BM : AM − BM = AM' + DM' : AM' − DM', d. h. AC : AB = AL : AD

Digitized by Google

und daher AB . AL = AC . AD = a^2. Ferner weil AME = AM'G und AM : AM' = BM : DM' = EM : GM' ist, so ist △ AME ∽ △ AM'G, also MAE = M'AG und daher MAE + MAG = M'AG + MAG, d. h. EAG = MAM' = α; endlich ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AE : AG = AM : AM' = AB : AD, also AE . AF : AG . AF = AB . AC : AD . AC und AE . AH : AG . AH = AB . AL : AD . AL; es ist aber AE . AF = AB . AC und AG . AH = AD . AL; folglich ist auch AG . AF = AD . AC = a^2 und AE . AH = AB . AL = a^2.

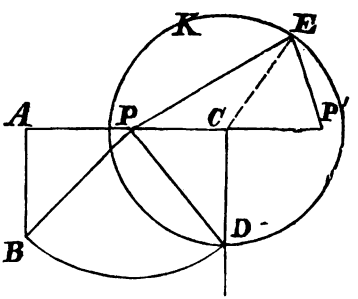
Zusatz 1. Konstruktion und Beweis bleiben dieselben, wenn A innerhalb K liegt. Einen zweiten Ort erhält man ferner, wenn man α auf der entgegengesetzten Seite an AM anlegt.

Zusatz 2. Ganz analoge Oerter erhält man auch hier, wie im vorigen Satze, für α = o oder = 180°.

21. Ort.

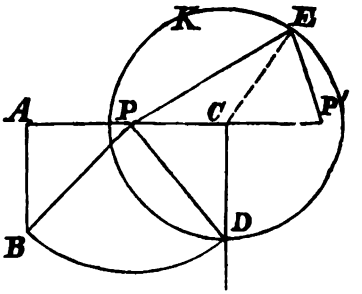
Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Summe der Quadrate ihrer Entfernungen von zwei gegebenen Punkten P und P' eine gegebene Größe = a^2 habe, ist eine konstruirbare Kreislinie.

Konstruktion. Ziehe PP' und verlängere es so nach A, daß PA = $\frac{1}{2}$ a wird, auf PA errichte in A einen Perpendikel AB ebenfalls = $\frac{1}{2}$ a und ziehe PB, auf PP' errichte im Halbirungspunkte C einen zweiten Perpendikel und beschreibe von P als Mittelpunkt mit PB als Halbmesser einen Kreisbogen, der diesen Perpendikel in D schneide. Von C als Mittelpunkt beschreibe mit CD als Halbmesser einen Kreis K, so ist K der gesuchte Ort.



Digitized by Google

Beweis. Auf K nimm einen beliebigen Punkt E, ziehe EP, EP'; ferner ziehe EC und PD; da PP' in C halbirt ist, so ist nach einem bekannten Satze über die Mittellinien $EP^2 + EP'^2 = 2EC^2 + 2PC^2 = 2CD^2 + 2PC^2$ (weil EC = CD ist) $= 2PD^2 = 2PB^2 = 2AP^2 + 2AB^2 = 2.\ {}^1/_4\,a^2 + 2.\ {}^1/_4\,a^2 = a^2$.



Zusatz 1. Ein anderer Ausdruck für obigen Ort ist folgender: der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie PP' zur Grundlinie haben und bei denen die Summe der Quadrate beider andern Seiten $= a^2$ gegeben ist, ist eine (nach dem Obigen) konstruirbare Kreislinie K. Dreiecksaufgaben, von welchen eine Seite und die Quadratsumme beider andern Seiten gegeben sind, reduziren sich daher auf solche, bei denen eine Seite und die dazu gehörige Mittellinie gegeben sind.

Zusatz 2. Ist $a = PP'$, so wird PP' Durchmesser von K; ist $a \gtrless PP'$, so ist auch der Durchmesser von K $\gtrless PP'$. Ist $a^2 < {}^1/_2 PP'^2$, so ist die Lösung unmöglich. Ist $a^2 = {}^1/_2 PP'^2$, d. h. ist a gleich der Seite eines Quadrats, dessen Diagonale PP' ist, so ist C der einzige Punkt, welcher der Bedingung entspricht.

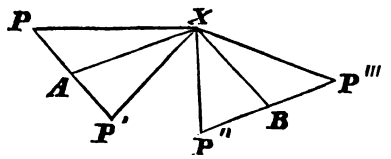
22. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Summe der Quadrate ihrer Entfernungen von vier gegebenen Punkten P, P', P'', P''' eine gegebene Größe $= a^2$ habe, ist eine konstruirbare Kreislinie.

Beweis. Es sei X ein solcher Punkt, so daß $XP^2 + XP'^2 + XP''^2 + XP'''^2 = a^2$ sei; ziehe

Digitized by Google

PP′, P″P‴, halbire beide in A und B und ziehe XA, XB, so ist nach einem bekannten Satze über die Mittellinien



$XP^2 + XP'^2 = 2XA^2 + 2AP^2$ und $XP''^2 + XP'''^2 = 2XB^2 + 2BP''^2$; also ist auch $2XA^2 + 2AP^2 + 2XB^2 + 2BP''^2 = a^2$; folglich ist $XA^2 + XB^2 = {}^1/_2\, a^2 - (AP^2 + BP''^2)$; also ist die Summe der Quadrate der Entfernungen des Punktes X von A und B gegeben; da nun A und B gegeben sind, so ist der Ort für X eine nach Ort 21 konstruirbare Kreislinie.

Zusatz. Ebenso läßt sich zeigen, daß für 8, 16, 32 u. s. w. überhaupt für 2^n Punkte auf gleiche Weise ein Ort gefunden werden kann.

23. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Summe der Quadrate der von ihnen an einen gegebenen Punkt P gezogenen geraden Linie und der an einen gegebenen Kreis, dessen Mittelpunkt M und dessen Halbmesser r gegeben ist, gezogenen Tangente eine gegebene Größe $= a^2$ habe, ist eine konstruirbare Kreislinie.

Beweis. Es sei die von einem solchen Punkte X nach P gezogene gerade Linie $= l$, die nach dem Kreise K gezogene Tangente $= t$, die nach dem Mittelpunkte M von K aber gezogene gerade Linie $= m$, so ist $l^2 + t^2 = a^2$; aber $m^2 = t^2 + r^2$; also ist $l^2 + m^2 = a^2 + r^2$; folglich ist die Summe der Quadrate der Entfernungen des Punktes X von den beiden Punkten P und M gegeben; daher ist der Ort für X eine nach Ort 21 konstruirbare Kreislinie.

24. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Summe der Quadrate der beiden von

Digitized by Google

ihnen an zwei gegebene Kreise K und K', deren Mittelpunkte M und M' und Halbmesser r und r' sind, gezogenen Tangenten eine gegebene Größe = a^2 habe, ist eine konstruirbare Kreislinie.

Beweis. Es sei X ein solcher Punkt und die beiden von ihm nach K und K' gezogenen Tangenten seien = t und t', die beiden an die Mittelpunkte M und M' gezogenen geraden Linien = m und m', so ist $t^2 + t'^2 = a^2$; aber $m^2 = t^2 + r^2$ und $m'^2 = t'^2 + r'^2$; also ist $m^2 + m'^2 = a^2 + r^2 + r'^2$; folglich ist die Summe der Quadrate der Entfernungen des Punktes X von den beiden Punkten M und M' gegeben; daher ist der Ort für X eine nach Ort 21 konstruirbare Kreislinie.

Zusatz. Aehnliche Oerter wie Nr. 23 und 24 ergeben sich aus Nr. 22, wenn statt P^I, P^{II}, P^{III}, P^{IV} Kreise K', K'', K''', K^{IV} gesetzt und Tangenten verlangt werden.

Erklärung.

Ein Kreis K heißt von einem Kreise K' rechtwinklig geschnitten, wenn die im Schneidungspunkte an beide Kreise gezogenen Tangenten (welche den Winkel messen, unter dem sich beide Kreise schneiden,) auf einander senkrecht stehen. Es ist dieß der Fall, wenn die beiden an den Durchschnittspunkt gezogenen Halbmesser auf einander senkrecht stehen. Ebenso heißt ein Kreis K von einem Kreis K' im Durchmesser geschnitten oder halbirt, wenn die gemeinschaftliche Chorde beider Kreise Durchmesser von K ist.

25. Ort.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreislinien, welche von einem gegebenen Kreise K rechtwinklig und von einem zweiten gegebenen Kreise K' im Durchmesser geschnitten werden, ist eine konstruirbare Kreislinie.

Beweis. Es läßt sich, wie in beiden vorigen Oertern, nachweisen, daß, wenn die Mittelpunkte und Halbmesser von

Digitized by Google

K und K′ wieder beziehungsweise mit M und M′ und mit r und r′ bezeichnet werden, die Summe der Quadrate der Entfernungen eines solchen Punktes von M und M′ = $r^2 + r'^2$ also gegeben ist; daher ist der Ort für denselben eine nach Ort 21 konstruirbare Kreislinie.

26. Ort.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreislinien, welche durch einen gegebenen Punkt P hindurch gehen und von einem gegebenen Kreise K im Durchmesser geschnitten werden, ist eine konstruirbare Kreislinie.

Beweis. Es läßt sich wieder, wie in den letzten Sätzen, nachweisen, daß die Quadratsumme der Entfernungen eines solchen Mittelpunktes von P und von dem Mittelpunkte M des Kreises K = r^2, d. h. gleich dem Quadrate des Halbmessers von K ist; daher ist der Ort für denselben eine nach Ort 21 konstruirbare Kreislinie.

27. Ort.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreislinien, welche eine gegebene Kreislinie K halbiren und von einer zweiten gegebenen Kreislinie K′ halbirt werden, ist eine konstruirbare Kreislinie.

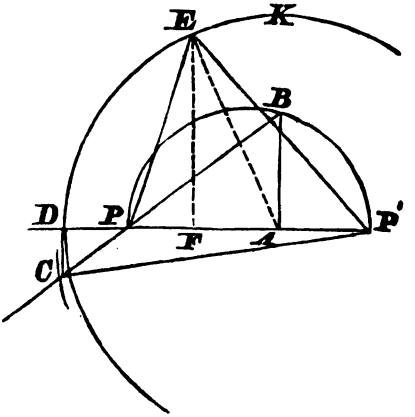
Beweis. Auch hier ist die Quadratsumme der Entfernungen eines solchen Punktes von den Mittelpunkten M und M′ beider Kreise = $r'^2 - r^2$, d. h. gleich der Differenz der Quadrate der Halbmesser beider Kreise; folglich ist der Ort für den Punkt eine nach Ort 21 konstruirbare Kreislinie.

28. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Summe des mfachen Quadrats ihrer Entfernung von einem gegebenen Punkte P und des nfachen Quadrats ihrer Entfernung von einem gegebenen Punkte P′ eine gegebene Größe = a^2 habe, ist eine konstruirbare Kreislinie.

Digitized by Google

Konstruktion. Ziehe PP′ und theile es in A so, daß AP : AP′ = n : m ist; über PP′ als Durchmesser beschreibe einen Halbkreis und errichte auf PP′ in A einen Perpendikel, welcher den Halbkreis in B treffe; ziehe BP, suche zu a und $\frac{1}{n}$ a die mittlere Proportionale und beschreibe mit ihr als Halbmesser



von P′ als Mittelpunkt einen Kreisbogen, welcher BP oder dessen Verlängerung in C treffe; von C fälle auf PP′ oder dessen Verlängerung einen Perpendikel CD und beschreibe von A als Mittelpunkt mit AD als Halbmesser einen Kreis K, so ist K der gesuchte Ort.

Beweis. Auf K nimm einen beliebigen Punkt E und ziehe EP und EP′; ferner ziehe P′C und EA und fälle von E auf PP′ den Perpendikel EF. Da AP : AB = AB : AP′ ist, so ist $AP^2 : AB^2 = AP : AP' = n : m$; aber es ist △ PCD ∽ △ PBA und daher PD : CD = AP : AB; also ist auch $PD^2 : CD^2 = AP^2 : AB^2 = n : m$, oder es ist $CD^2 = \frac{m}{n} PD^2$; nun ist $P'C^2 = \frac{1}{n} a^2$; also ist $\frac{1}{n} a^2 = P'D^2 + CD^2 = P'D^2 + \frac{m}{n} PD^2$; und daher

$$\begin{aligned} a^2 &= n\,P'D^2 + m\,PD^2 \\ &= n\,(AD + AP')^2 + m\,(AD - AP)^2 \\ &= n\,AD^2 + 2n\,AD \,.\, AP' + n\,AP'^2 + m\,AD^2 - \\ &\quad 2m\,AD \,.\, AP + m\,AP^2. \\ &= n\,AD^2 + n\,AP'^2 + m\,AD^2 + m\,AP^2 \text{ (weil } AP : AP' \\ &\quad = n : m, \text{ also } m\,AP = n\,AP' \text{ und daher auch} \\ &\quad 2m\,AD \,.\, AP = 2n\,AD \,.\, AP' \text{ ist)} \end{aligned}$$

Digitized by Google

$= (m + n)\,AD^2 + n\,AP'^2 + m\,AP^2$.

Nun ist $EP^2 = AE^2 + AP^2 - 2AP \cdot AF$ und

$EP'^2 = AE^2 + AP'^2 + 2AP' \cdot AF$; also

$m\,EP^2 = m\,AE^2 + m\,AP^2 - 2\,m\,AP \cdot AF$ und

$n\,EP'^2 = n\,AE^2 + n\,AP'^2 + 2\,n\,AP' \cdot AF$, also

$m\,EP^2 + n\,EP'^2 = (m+n)\,AE^2 + m\,AP^2 + n\,AP'^2$ (weil wieder $m\,AP = n\,AP'$, also $2\,m\,AP \cdot AF = 2\,n\,AP' \cdot AF$ ist); folglich da $AD = AE$ ist, so ist $m\,EP^2 + n\,EP'^2 = a^2$.

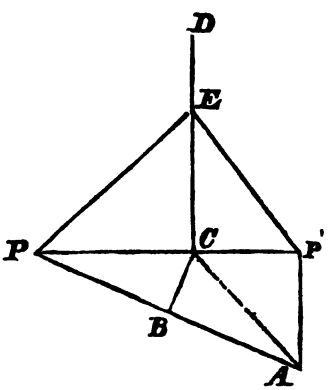
Zusatz 1. Wenn $m = 1$ und $n = 1$ und allgemein, wenn $m = n$ wird, so geht der Ort in den 21ten Ort über, für welchen sich also aus dem Obigen noch eine weitere der hier gegebenen analoge Konstruktion ergibt.

Zusatz 2. Ein anderer Ausdruck des obigen Ortes ist: wenn von einem Dreiecke eine Seite und die Summe des mfachen Quadrats der zweiten und des nfachen Quadrats der dritten Seite gegeben sind, so ist der geometrische Ort für die der gegebenen Seite gegenüberliegende Winkelspitze eine konstruirbare Kreislinie.

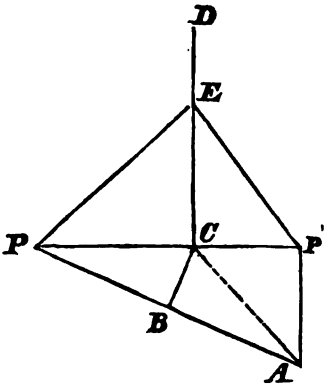
29. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Differenz der Quadrate ihrer Entfernungen von zwei gegebenen Punkten P und P' eine gegebene Größe $= a^2$ habe, ist eine konstruirbare gerade Linie.

Konstruktion. Ziehe PP', auf PP' errichte in P' einen Perpendikel $P'A = a$, ziehe PA und errichte auf PA im Halbirungspunkte B einen Perpendikel, bis er PP' oder dessen Verlängerung in C trifft; endlich errichte auf PP' in C einen Perpendikel CD, so ist dieser der gesuchte Ort.



Digitized by Google



Beweis. Von einem beliebigen Punkte E auf CD ziehe EP, EP', ferner ziehe AC, so ist $EP^2 = EC^2 + PC^2$, $EP'^2 = EC^2 + P'C^2$; daher ist $EP^2 - EP'^2 = (EC^2 + CP^2) - (EC^2 + CP'^2) = CP^2 - CP'^2 = CA^2 - CP'^2$ (weil CA = CP ist) $= AP'^2 = a^2$.

Zusatz 1. Ist $a = PP'$, so fällt C mit P' zusammen, ist $a < PP'$, so liegt C auf PP', ist endlich $a > PP'$, so liegt C auf der Verlängerung von PP'. Ist $a = 0$, so ist $EP^2 - EP'^2 = 0$, also $EP^2 = EP'^2$, folglich ist $EP = EP'$. Der Ort 29 geht also über in den Ort 6.

Zusatz 2. Ein anderer Ausdruck des obigen Ortes ist: wenn von einem Dreiecke eine Seite und die Differenz der Quadrate beider andern Seiten gegeben sind, so ist der geometrische Ort für die der gegebenen Seite gegenüberliegende Winkelspitze eine konstruirbare gerade Linie.

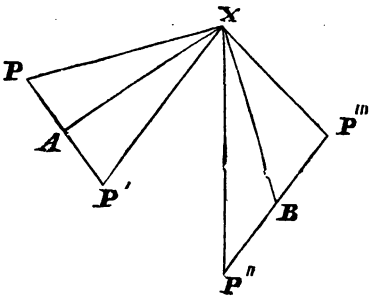
30. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Summe der Quadrate ihrer Entfernungen von zwei gegebenen Punkten P und P' gleich ist der Summe der Quadrate ihrer Entfernungen von zwei andern gegebenen Punkten P'' und P''', ist eine konstruirbare gerade Linie.

Beweis. Es sei X ein solcher Punkt mit der Eigenschaft, daß $XP^2 + XP'^2 = XP''^2 + XP'''^2$ sei; ziehe PP', P''P''' und es sei P''P''' > PP'; halbire PP' in A und P''P''' in B, so ist auch P''B > PA; nun ist $XP^2 + XP'^2 = 2\,XA^2 + 2\,PA^2$, und $XP''^2 + XP'''^2 = 2XB^2 + 2P''B^2$; daher ist auch $2XA^2 + 2PA^2 = 2XB^2 + P''B^2$; folglich

Digitized by Google

$XA^2 - XB^2 = P''B^2 - PA^2$; daher ist die Differenz der Quadrate der Entfernungen des Punktes X von den Punkten A und B gegeben; also ist der Ort für X eine nach Nr. 29 konstruirbare gerade Linie.



31. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Differenz der Quadrate ihrer Entfernungen von zwei gegebenen Punkten P und P' gleich ist der Differenz der Quadrate ihrer Entfernungen von zwei andern gegebenen Punkten P'' und P''', ist eine konstruirbare gerade Linie.

Beweis. Es läßt sich leicht zeigen, daß in diesem Falle die Summe der Quadrate der Entfernungen eines solchen Punktes von P und P''' gleich ist der Summe der Quadrate seiner Entfernungen von P' und P''; daher ist der vorige Ort zu konstruiren.

32. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Differenz des Quadrats der von ihnen nach einem gegebenen Punkte P gezogenen geraden Linie und des Quadrats der von ihnen nach einem gegebenen Kreise K gezogenen Tangente eine gegebene Größe $= a^2$ habe, ist eine konstruirbare gerade Linie.

Beweis. Es sei M Mittelpunkt und r Halbmesser des Kreises K, so läßt sich leicht zeigen, daß die Differenz der Quadrate der Entfernungen eines solchen Punktes von P und

Digitized by Google

$M = a^2 \pm r^2$ wird, je nachdem die eine oder andere Entfernung größer ist; also kann der Ort nach Nr. 29 konstruirt werden.

33. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Differenz der Quadrate der von ihnen nach zwei gegebenen Kreisen K und K′ gezogenen Tangenten eine gegebene Größe $= a^2$ habe, ist eine konstruirbare gerade Linie.

Beweis. Wenn M und M′ die Mittelpunkte, r und r′ die Halbmesser von K und K′ sind, so läßt sich zeigen, daß die Differenz der Quadrate der Entfernungen eines solchen Punktes von M und M′ $= a^2 \pm r^2 \mp r'^2$ ist; daher ist der Ort nach Nr. 29 konstruirbar.

34. Ort.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche die Eigenschaft haben, daß die Differenz der Quadrate der beiden von zwei gegebenen Punkten P und P′ an sie gezogenen Tangenten eine gegebene Größe $= a^2$ habe, ist eine konstruirbare gerade Linie.

Beweis. Es läßt sich zeigen, daß die Differenz der Quadrate der Entfernungen eines solchen Mittelpunktes von P und P′ ebenfalls $= a^2$ sei, also ist der Ort nach Nr. 29 konstruirbar.

35. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, von denen aus zwei gleiche Tangenten an zwei gegebene Kreise K und K′ gezogen werden können, ist eine konstruirbare gerade Linie.

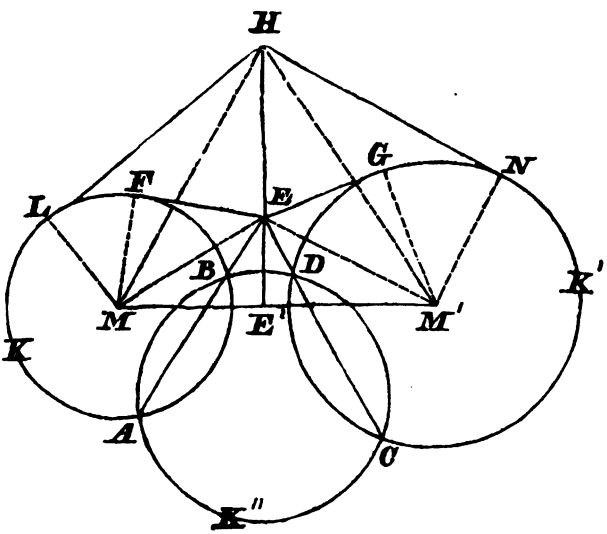
Beweis. Wenn die bisherigen Bezeichnungen auch hier gelten, so läßt sich wieder zeigen, daß die Differenz der Qua-

Digitized by Google

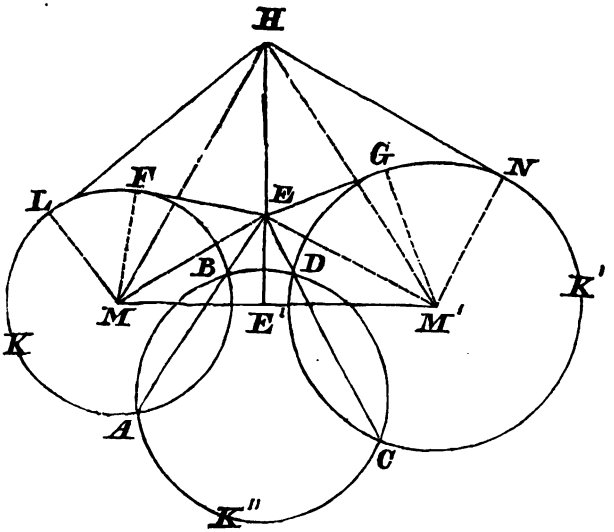
drate der Entfernungen eines solchen Punktes von M und M′ = $r^2 - r'^2$ oder $= r'^2 - r^2$ ist, je nachdem $r \gtrless r'$ ist, wobei die Entfernung des Punktes von dem Mittelpunkte des größern Kreises auch die größere ist; daher ist der Ort nach Nr. 29 konstruirbar.

Zusatz 1. Der Ort 34 ist ein besonderer Fall des Ortes 14, wodurch sich für Ort 34 auch eine andere Konstruktion ergeben dürfte.

Zusatz 2. Eine in vielen Fällen einfachere Konstruktion des obigen Ortes ist folgende: Verbinde die Mittelpunkte M und M′ beider Kreise durch MM′; beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser von einem beliebigen Mittelpunkte aus einen Kreis K″, der sowohl K als K′ je in zwei Punkten A und B, C und D schneide; ziehe AB und CD und verlängere beide, bis sie sich in E schneiden; von E fälle endlich auf MM′ den Perpendikel EE′, so ist EE′ und dessen Verlängerung der gesuchte Ort. Denn ziehe zunächst von E an K und K′ die Tangenten EF, EG, so ist $EF^2 = EA \cdot EB$ und $EG^2 = EC \cdot ED$; aber $EA \cdot EB = EC \cdot ED$ (als Sekanten im Kreise K″); folglich ist $EF^2 = EG^2$, und daher auch EF = EG. Nimm nun auf EE′ oder dessen



Digitized by Google



Verlängerung einen beliebigen Punkt H und ziehe nach K und K' die Tangenten HL und HN, ziehe ferner HM, HM', ML, MF, M'N, M'G, ME, M'E, so ist $EF^2 = EG^2$,

d. h. $EM^2 - MF^2 = EM'^2 - M'G^2$,

d. h. $EE'^2 + E'M^2 - MF^2 = EE'^2 + E'M'^2 - M'G^2$,

also $E'M^2 - MF^2 = E'M'^2 - M'G^2$;

folglich $HE'^2 + E'M^2 - MF^2 = HE'^2 + E'M'^2 - M'G^2$,

d. h. $HM^2 - MF^2 = HM'^2 - M'G^2$,

d. h. $HM^2 - ML^2 = HM'^2 - M'N^2$,

d. h. $HL^2 = HN^2$;

folglich ist HL = HN.

Zusatz 3. Wenn K und K' einander berühren, so ist der gesuchte Ort die an den Berührungspunkt gezogene gemeinschaftliche Tangente. Wenn dagegen K und K' einander schneiden, so ist die Verlängerung der gemeinschaftlichen Chorde der gesuchte Ort.

Zusatz 4. Die neuere Geometrie nennt den erhaltenen Ort die Potenzlinie der beiden Kreise, weil das Rechteck aus den Stücken der von irgend einem Punkte des Ortes durch K gezogenen Sekanten gleich ist dem Rechtecke aus den Stücken der von dem nemlichen Punkte nach K' gezogenen Sekanten.

Digitized by Google

Zusatz 5. Wenn 3 Kreise K, K', K'' gegeben sind, so gibt es für je K und K', für K und K'' und endlich für K' und K'' eine Potenzlinie. Es ergibt sich, daß die letztere durch den Durchschnittspunkt der beiden erstern hindurchgehen muß. Es schneiden sich also die drei Potenzlinien dreier Kreise in einem einzigen Punkte, also auch die drei an die Berührungspunkte gezogenen gemeinschaftlichen Tangenten dreier sich paarweise berührender und ebenso die drei gemeinschaftlichen Chorden dreier sich paarweise schneidender Kreise.

Zusatz 6. Denkt man sich von H als Mittelpunkt mit HL als Halbmesser einen Kreis beschrieben, so wird durch diesen sowohl K als K' rechtwinklig geschnitten. Der obige Ort kann also auch so ausgedrückt werden: Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, von welchen zwei gegebene Kreise K und K' rechtwinklig geschnitten werden, ist die Potenzlinie der beiden Kreise K und K'. Dabei ist zu bemerken, daß, wenn K und K' einander schneiden, der hierher gehörige Ort nur die Verlängerung der gemeinschaftlichen Chorde ist, während die gemeinschaftliche Chorde selbst der Ort ist für die Mittelpunkte aller Kreise, welche von K und K' zugleich im Durchmesser geschnitten oder halbirt werden.

Zusatz 7. An den von H als Mittelpunkt mit HL als Halbmesser beschriebenen Kreis sind die Linien ML und M'N Tangenten; da nun mit K und K' sowohl M und M' als auch die Größe von ML und M'N gegeben sind, so kann unser Ort auch so ausgedrückt werden:

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche die Eigenschaft haben, daß die von zwei gegebenen Punkten M und M' an sie gezogenen Tangenten gegebene Größen = a und a' haben, ist die Potenzlinie der beiden Kreise K und K', welche von den Mittelpunkten M und M' mit den Halbmessern a und a' beschrieben sind.

Zusatz 8. Wenn die Kreise K und K' von einem beliebigen Kreise K'' je in zwei Punkten geschnitten werden, so müssen sich die beiden dadurch entstandenen zusammengehörigen Chorden AB und CD auf FH schneiden. Folglich kann obiger Ort auch so ausgedrückt werden: Der geometrische Ort für alle Punkte, in welchen sich die zusammengehörigen Chorden schneiden, welche entstehen, wenn zwei gegebene Kreise K und K' von einem beliebigen dritten Kreise K'' geschnitten

Digitized by Google

werden, ist die Potenzlinie der Kreise K und K'. Dasselbe gilt für die beiden gemeinschaftlichen Tangenten, wenn K und K' durch K'' berührt werden, oder für die gemeinschaftliche Tangente und die gemeinschaftliche Chorde, wenn K'' den einen Kreis berührt, den andern schneidet.

Zusatz 9. Eine weitere Ausführung der Lehre von den Potenzlinien s. in meiner ebenen Geometrie, Buch 8.

36. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen an einen gegebenen Punkt P gezogene gerade Linie gleich ist der von ihnen an einen gegebenen Kreis K gezogenen Tangente, ist eine konstruirbare gerade Linie.

Beweis. Es läßt sich zeigen, daß wenn M Mittelpunkt und r Halbmesser von K ist, die Differenz der Quadrate der Entfernungen eines solchen Punktes von M und P $= r^2$ ist, wobei derselbe von M weiter entfernt ist als von P; daher ist der Ort nach Nr. 29 konstruirbar.

Zusatz 1. Eine ähnliche Vereinfachung der Konstruktion wie beim vorigen Orte, Zusatz 1 ergibt sich durch einen Hilfskreis, der durch P geht und den Kreis K schneidet, wenn man an diesen Hilfskreis in P eine Tangente zieht und sie bis zum Durchschnitt mit der in K entstandenen gemeinschaftlichen Chorde verlängert, worauf man wie beim vorigen Orte Zusatz 2 weiter verfährt.

Zusatz 2. Analog den bei dem vorigen Orte gefundenen andern Ausdrücken ist der obige Ort zugleich der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen und einen gegebenen Kreis K rechtwinklig schneiden; ebenso für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen und die Eigenschaft haben, daß die von einem zweiten gegebenen Punkt M an sie gezogene Tangente eine gegebene Größe $= a$ habe.

Digitized by Google

37. Ort.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen und einen gegebenen Kreis K halbiren, ist eine konstruirbare gerade Linie.

Beweis. Es läßt sich wieder wie bei dem vorigen Orte zeigen, daß die Differenz der Quadrate der Entfernungen eines solchen Punktes von P und M $= r^2$ ist, wobei derselbe von P weiter entfernt ist, als von M; daher ist der Ort nach Nr. 29 konstruirbar.

Zusatz. Die in Zusatz 1 zum vorigen Orte gegebene einfachere Konstruktion läßt sich auch hier anwenden; wenn nemlich die Linie MP nach dem dort angegebenen Verfahren getheilt worden ist, darf man nur die Entfernungen des Theilungspunktes von M und P verwechseln und hierauf in dem einen Theilungspunkte auf MP einen Perpendikel errichten, um unsern neuen Ort zu erhalten.

38. Ort.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreislinien, welche zwei gegebene Kreislinien K und K′ halbiren, ist eine konstruirbare gerade Linie.

Beweis. Wenn M und M′ Mittelpunkte, r und r′ Halbmesser der beiden Kreise K und K′ sind, so läßt sich zeigen, daß die Differenz der Quadrate der Entfernungen eines solchen Punktes von M und M′ wie bei dem Orte Nr. 35 $= r^2 - r'^2$ oder $= r'^2 - r^2$ ist, je nachdem $r \gtrless r'$ ist, wobei aber die Entfernung des Punktes von dem Mittelpunkte des größern Kreises die kleinere ist; daher ist der Ort nach Nr. 29 konstruirbar.

Zusatz. Auch hier kann (wie bei dem vorigen Orte im Verhältniß zum Orte Nr. 36) die in Zusatz 1 zum Orte Nr. 35 gegebene einfachere Konstruktion angewendet werden; nur ist nachher wieder die Entfernung des Theilungspunktes der Linie MM′ von M und M′ zu vertauschen und hierauf

Digitized by Google

in dem neuen Theilungspunkte auf MM' ein Perpendikel zu errichten.

39. Ort.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreislinien, welche einen gegebenen Kreis K rechtwinklig und einen zweiten gegebenen Kreis K' im Durchmesser schneiden, ist eine konstruirbare gerade Linie.

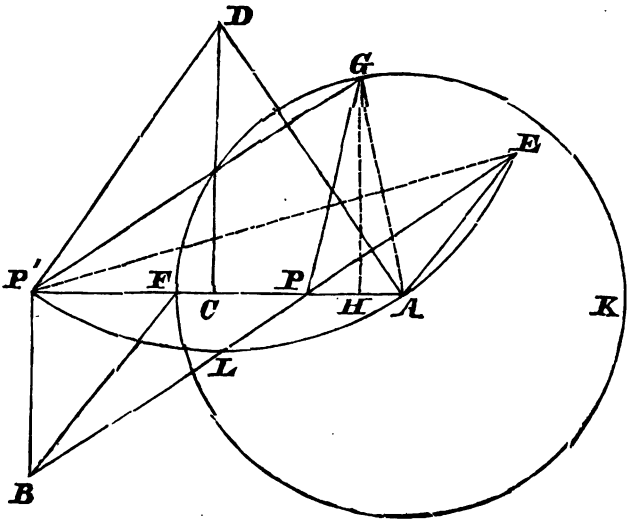
Beweis. Es läßt sich wieder unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen zeigen, daß die Differenz der Quadrate der Entfernungen eines solchen Punktes von M und M' $= r^2 + r'^2$ ist; daher ist wieder der Ort nach Nr. 29 konstruirbar.

40. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Differenz des mfachen Quadrats ihrer Entfernung von einem gegebenen Punkte P und des nfachen Quadrats ihrer Entfernung von einem gegebenen Punkte P' eine gegebene Größe $= a^2$ habe, ist eine konstruirbare Kreislinie.

Konstruktion. Ziehe PP' und verlängere es nach A so, daß P'A : PA = m : n ist. Auf PP' errichte in P' einen Perpendikel P'B so, daß $P'B^2 = \frac{1}{n} a^2$ (also $a : P'B : \frac{1}{n} a$) ist; ziehe BP; halbire P'A in C; auf P'A errichte in C einen Perpendikel und von A fälle auf PB einen zweiten Perpendikel und verlängere beide, bis sie sich in D schneiden; ziehe P'D und beschreibe von D als Mittelpunkt mit DP' als Halbmesser einen Kreisbogen, der auch durch A gehen wird, weil D auf dem im Halbirungspunkte C von P'A errichteten Perpendikel liegt und der die Verlängerung von BP in E treffen wird; ziehe AE und durch B eine Parallele mit AE, bis sie PP' in F trifft; endlich beschreibe von A als Mittelpunkt mit AF als Halbmesser einen Kreis K, so ist dieser der gesuchte Ort.

Digitized by Google

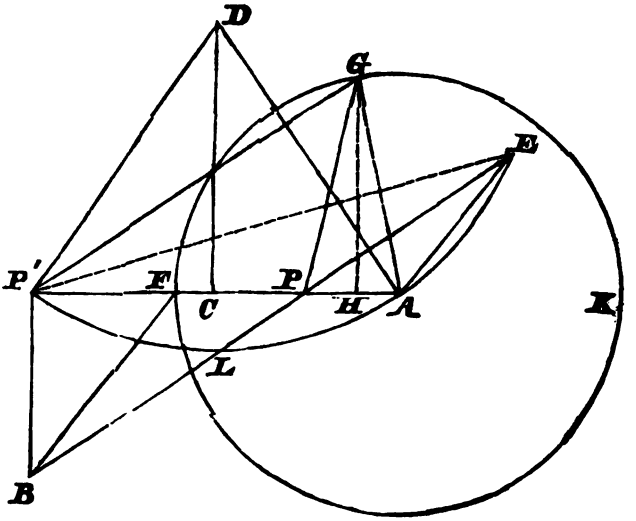


Beweis. Auf K nimm einen beliebigen Punkt G und ziehe GP, GP'; ferner ziehe GA und fälle von G auf PP' oder deſſen Verlängerung den Perpendikel GH; ferner ſchneide BE den Kreisbogen P'AE in L, ſo iſt, weil DA vom Mittelpunkte D auf LE ſenkrecht ſteht, durch DA die Chorde LE, alſo auch in A der Bogen LAE halbirt. Zieht man daher P'E, ſo iſt PEA = AP'E; da nun auch PAE = P'AE iſt, ſo iſt △ AEP ∽ △ AP'E und daher PA : AE = AE : AP', alſo $PA^2 : AE^2 = PA : AP' = n : m$. Da ferner BF ∥ AE iſt, ſo iſt △ BFP ∽ △ EAP und daher PF : BF = PA : AE, alſo auch $PF^2 : BF^2 = PA^2 : AE^2 = n : m$ und daher $BF^2 = \frac{m}{n} PF^2$; nun iſt $BP'^2 = BF^2 - P'F^2$, d. h. $\frac{1}{n} a^2 = \frac{m}{n} PF^2 - P'F^2$; folglich iſt

$$\begin{aligned} a^2 &= mPF^2 - nP'F^2 \\ &= m(AF - AP)^2 - n(AP' - AF)^2 \\ &= mAF^2 - 2mAF.AP + mAP^2 - nAP'^2 + 2nAP'.AF - nAF^2 \\ &= (m - n)AF^2 + mAP^2 - nAP'^2 \end{aligned}$$

(weil AP : AP' = m : n, alſo nAP' = mAP und daher auch 2nAP' . AF = 2mAF . AP iſt).

Digitized by Google



Nun ist $GP^2 = GA^2 + AP^2 - 2AP \cdot AH$

und $GP'^2 = GA^2 + AP'^2 - 2AP' \cdot AH$; also

$mGP^2 = mGA^2 + mAP^2 - 2mAP \cdot AH$ und

$nGP'^2 = nGA^2 + nAP'^2 - 2nAP' \cdot AH$; also

$mGP^2 - nGP'^2 = (m - n)GA^2 + mAP^2 - nAP'^2$

(da wieder $2mAP \cdot AH = 2nAP' \cdot AH$ ist). Da nun $GA = AF$ ist,

so ist $mGP^2 - nGP'^2 = mPF^2 - nP'F^2 = a^2$.

Zusatz 1. Wenn $m = 1$ und $n = 1$ oder $m = n$ wird, so wird $P'A = PA$, d. h. A liegt in unendlicher Entfernung von P und P'; der Kreis K geht also in einen solchen mit unendlich großem Halbmesser, also in eine gerade Linie über, welche auf PP' in F senkrecht steht, wodurch man den Ort Nr. 29 erhält.

Zusatz 2. Ein anderer Ausdruck des obigen Ortes ist: wenn von einem Dreiecke eine Seite und die Differenz des mfachen Quadrats der zweiten und des nfachen Quadrats der dritten Seite gegeben sind, so ist der geometrische Ort für die der gegebenen Seite gegenüberliegende Winkelspitze eine konstruirbare Kreislinie.

Digitized by Google

Zusatz 3. Eine unmittelbare Folge des Ortes 40 ist eine Erweiterung des Ortes 35, nemlich der Ort für alle Punkte, von denen aus an zwei gegebene Kreise K und K' zwei Tangenten gezogen werden können, welche ein gegebenes Verhältniß = m : n haben. Bezeichnet man nemlich die Mittelpunkte der gegebenen Kreise mit C und C', ihre Halbmesser mit r und r', einen Punkt des gesuchten Ortes mit X und die Größe der an die Kreise gezogenen Tangenten mit t und t', so muß $t : t' = m : n$ werden, also auch $t^2 : t'^2 = m^2 : n^2$; nun ist $t^2 = XM^2 - r^2$ und $t'^2 = XM'^2 - r'^2$; folglich muß $XM^2 - r^2 : XM'^2 - r'^2 = m^2 : n^2$ werden, also $n^2(XM^2 - r^2) = m^2(XM'^2 - r'^2)$, woraus sich ergibt $n^2 XM^2 - m^2 XM'^2 = n^2 r^2 - m^2 r'^2$, d. h. die Differenz zwischen dem n^2fachen Quadrate der Entfernung des Punktes X vom Mittelpunkte M und dem m^2fachen Quadrate der Entfernung desselben Punktes vom Mittelpunkte M' hat die gegebene Größe $n^2 r^2 - m^2 r'^2$, führt also unmittelbar auf den Ort 40.

41. Ort.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene gerade Linie L in einem auf ihr gegebenen Punkte P berühren, ist der auf L in P errichtete Perpendikel.

Beweis ist bekannt.

42. Ort.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Kreislinie K in einem auf ihr gegebenen Punkte P berühren, ist der durch P gezogene Durchmesser und dessen Verlängerung.

Beweis ist bekannt.

43. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen nach zwei gegebenen Punkten P und P' gezogenen geraden Linien einen gegebenen Winkel α bilden, ist der über PP' beschriebene Kreisabschnitt, welcher den Winkel α faßt.

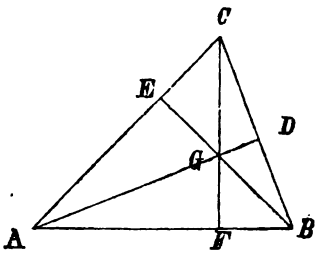
Beweis s. in jeder Elementargeometrie.

Digitized by Google

Zusatz 1. Ein anderer Ausdruck des Ortes ist: Der über einer begrenzten geraden Linie als Chorde beschriebene Kreisabschnitt, der einen gegebenen Winkel faßt, ist der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche die gerade Linie zur Grundlinie haben und deren Winkel an der Spitze gleich dem gegebenen ist.

Zusatz 2. Ist der gegebene Winkel $= 90^0$, so wird die Linie PP' der Durchmesser des Kreisabschnittes und statt des Kreisabschnittes kann der ganze Kreis gebraucht werden.

Zusatz 3. Wenn in $\triangle$ ABC die Höhenperpendikel AD, BE, CF gezogen werden, welche sich bekanntlich in einem einzigen Punkte G schneiden, so ist $AGB = DGE$, aber $DGE = 180^0 - ACB$, weil $GDC = 90^0$ und $GEC = 90^0$, also $DGE + DCE = 180^0$ ist. Wenn daher von einem Dreiecke eine Seite AB, und der gegenüberliegende Winkel $ACB = \alpha$ gegeben ist,



so ist damit nicht blos der in Zusatz 1 bezeichnete Ort gegeben, sondern es ist auch der über AB als Chorde beschriebene Kreisabschnitt, der einen Winkel $= 180^0 - \alpha$ faßt, der Ort für die Durchschniite der Höhenperpendikel aller Dreiecke, welche AB zur Grundlinie und α zum Winkel an der Spitze haben.

44. Ort.

Der geometrische Ort für die Halbirungspunkte aller Chorden eines gegebenen Kreises K, welche entweder selbst durch einen in oder auf der Peripherie von K gegebenen Punkt P, oder verlängert durch einen außerhalb K gegebenen Punkt P gehen, ist ein über der Verbindungslinie des Punktes P mit dem Mittelpunkte M des Kreises K als Durchmesser beschriebener Kreis.

Beweis folgt unmittelbar aus dem vorigen Orte Zusatz 2, in Verbindung mit dem Satze, daß durch einen von dem Mittelpunkte eines Kreises auf eine Chorde in demselben gefällten Perpendikel die Chorde halbirt werde.

Digitized by Google

45. Ort.

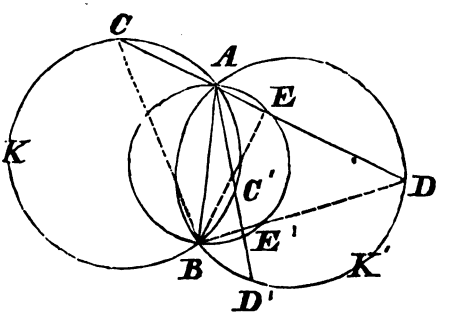
Der geometrische Ort für die Halbirungslinie aller Chorden von gegebener (also gleicher) Größe = a in einem gegebenen Kreise K ist ein mit K konzentrischer Kreis, dessen Halbmesser der von dem Mittelpunkte des Kreises K auf irgend eine in den Kreis K gelegte Chorde, welche die gegebene Größe = a hat, gefällte Perpendikel ist.

Beweis ist einfach.

46. Ort.

Der geometrische Ort für die Halbirungspunkte aller geraden Linien, welche von irgend einem Punkte eines gegebenen Kreises K nach einem Punkte eines zweiten den Kreis K schneidenden und ihm gleichen Kreises K′ so gezogen werden, daß sie entweder selbst oder verlängert durch einen der Schneidungspunkte hindurchgehen, ist der über der gemeinschaftlichen Chorde beider Kreise als Durchmesser beschriebene Kreis K″.

Beweis. K und K′ schneiden sich in A und B und über AB als Durchmesser sei ein Kreis K″ beschrieben; von einem beliebigen Punkte C auf K ziehe durch A eine gerade Linie, welche K′ in D und K″ in E treffe; ziehe BC, BD, BE; da BA gemeinschaftliche Chorde zweier einander gleicher Kreise ist, so ist BCA = BDA (als Peripheriewinkel auf gleichen Chorden in gleichen Kreisen); daher ist BC = BD oder △ BCD gleichschenklig; nun ist BEA = 90° (als Winkel im Halbkreise) oder BE Perpendikel auf CD; folglich ist CD in E halbirt. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß, wenn man auf K einen Punkt C′ nimmt und durch ihn eine gerade Linie C′D′ so zieht, daß sie verlängert durch A geht, C′D′ durch K″ in E′ halbirt wird.

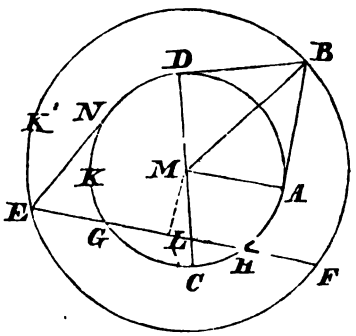


Digitized by Google

47. Ort.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen an einen gegebenen Kreis K gezogenen Tangenten eine gegebene Größe = a haben, oder auch, daß die von ihnen an einen gegebenen Kreis K gezogenen Tangentenpaare einen gegebenen Winkel = α einschließen, ist eine konstruirbare mit K konzentrische Kreislinie K'.

Konstruktion. 1) Wenn a gegeben ist: von dem Mittelpunkte M des Kreises K ziehe einen beliebigen Halbmesser MA; auf MA errichte in A einen Perpendikel AB = a; ziehe MB und beschreibe mit dem Halbmesser MB einen konzentrischen Kreis K', so ist dieser der gesuchte Ort.



2) Wenn α gegeben ist: ziehe wieder von dem Mittelpunkte M einen beliebigen Halbmesser MA; an MA lege in M einen Winkel AMC = α und verlängere CM nach D; auf MA und MD errichte in A und D Perpendikel, bis sie sich in B schneiden, ziehe MB und beschreibe mit MB als Halbmesser einen konzentrischen Kreis K', so ist dieser der gesuchte Ort.

Beweis. Es läßt sich leicht aus der Kongruenz der Dreiecke zeigen, daß, wenn von einem beliebigen Punkte auf K' eine Tangente oder ein Tangentenpaar nach K gezogen wird, die Tangente = BA = a, oder der Winkel, den das Tangentenpaar macht = ABD = AMC = α ist, da AMD + ABD = AMD + AMC = 180° ist.

Zusatz 1. Wenn K' als gegeben betrachtet wird und mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks MBA, von welchem die Hypotenuse MB gleich dem Halbmesser von K' und die eine

Digitized by Google

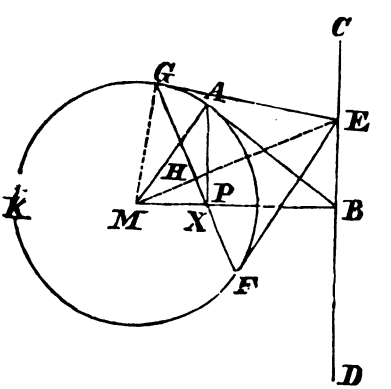
Kathete AB = a gegeben sind, der Halbmesser MA für K und somit K selbst bestimmt wird, so ist K der geometrische Ort für die Theilungspunkte aller in K' gezogenen Chorden, welche so getheilt werden, daß das Rechteck aus beiden Theilen eine gegebene Größe = a^2 hat. Denn ziehe in K' eine beliebige Chorde EF, welche K in G und H schneide, fälle von M auf EF den Perpendikel ML und ziehe von E an K die Tangente EN, so ist EN = a; also EG . EH = EN^2 = a^2; aber EL = LF, LH = GL, also EL + LH = LF + GL, d. h. EH = GF; folglich ist auch EG . GF = EH . HF = a^2.

Zusatz 2. Auf ähnliche Art ist K' der geometrische Ort für die Endpunkte aller in K gezogenen Chorden (z. B. GH), welche so (nach E) verlängert werden sollen, daß das Rechteck aus der Verlängerung (EG) und aus der Summe der Chorde und ihrer Verlängerung (EG + GH = EH) eine gegebene Größe = a^2 hat.

48. Ort.

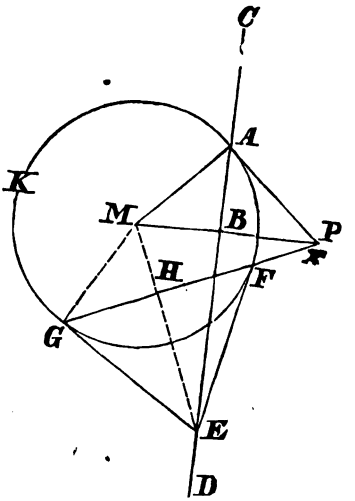
Der geometrische Ort für alle Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß, wenn man von ihnen Tangentenpaare an einen gegebenen Kreis K zieht, die durch die Berührungspunkte gezogenen Chorden entweder selbst oder verlängert durch einen gegebenen Punkt P gehen, ist eine konstruirbare gerade Linie.

Konstruktion. 1) Wenn P innerhalb K liegt: ziehe MP; errichte auf MP in P einen Perpendikel, welcher K in A treffe; ziehe an K in A eine Tangente, welche die Verlängerung von MP in B treffe; endlich ziehe durch B eine Parallele CD mit AP, so ist CD der gesuchte Ort.



Digitized by Google

2) Wenn P außerhalb K liegt: ziehe MP und von P an K eine Tangente PA; endlich ziehe durch A eine gerade Linie CD, welche auf MP in B senkrecht steht, so ist der außerhalb K liegende Theil von CD der gesuchte Ort.



3) Wenn P auf K selbst liegt, so ist die in P an K gezogene Tangente der gesuchte Ort.

Beweis. Für den dritten Fall ergibt sich der Beweis von selbst. Im ersten und zweiten Falle nimm auf CD einen beliebigen Punkt E, im zweiten natürlich außerhalb K, und ziehe von E die Tangenten EF, EG an K; ziehe FG, MG und ME, welches FG in H schneide; da EM auf FG senkrecht, aber auf MP schief steht, so sind FG und MP nicht parallel, sondern schneiden sich entweder selbst oder in der Verlängerung; es geschehe dieß in einem Punkte X, so ist $\triangle$ EMB $\sim$ $\triangle$ XMH, weil EBM = XHM = 90° und BME = HMX ist; daher ist EM : XM = MB : MH, also EM . MH = XM . MB; nun ist EM . MH = $MG^2 = r^2$ (wenn der Halbmesser von K = r gesetzt wird), weil $\triangle$ EMG bei G rechtwinklig ist; also ist auch XM . MB = r^2; ebenso ist aber auch PM . MB = r^2, weil im ersten Falle $\triangle$ MAB, im zweiten $\triangle$ MAP bei A rechtwinklig ist; daher ist XM . MB = PM . MB; also XM = PM, oder X fällt mit P zusammen; also geht FG durch P.

Zusatz. Man vergleiche damit die in meiner ebenen Geometrie Buch 8 enthaltenen Sätze über Pole und Polaren.

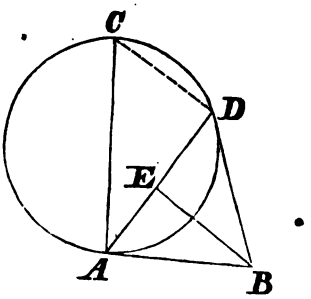
49. Ort.

Wenn von einem Dreiecke eine Seite = a und das Verhältniß einer zweiten Seite zu der dieser letztern zugehörigen

Digitized by Google

Höhe = m : n gegeben ist, so ist der geometrische Ort für die Spitze des der Seite a gegenüberliegenden Winkels eine konstruirbare Kreislinie K.

Konstruktion. Auf AB = a errichte in A einen Perpendikel AC so, daß AC: AB = m : n ist, und beschreibe über AC als Durchmesser einen Kreis K, so ist dieser der gesucht Ort.



Beweis. Auf K nimm einen beliebigen Punkt D, ziehe DA, DB und fälle von B auf AD den Perpendikel BE; ziehe endlich CD, so ist ADC = AEB = 90° und ACD = BAE, weil ACD + CAD = BAE + CAD = 90° ist; daher ist △ ACD ∾ △ ABE, also AD : BE = AC : AB = m : n.

50. Ort.

Wenn von einem Dreiecke der Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises = R und der Halbmesser des inneren Berührungskreises = r gegeben sind, so ist eine von dem Mittelpunkte des einen der beiden Kreise zu beschreibende konstruirbare Kreislinie der geometrische Ort für den Mittelpunkt des andern Kreises.

Beweis. Setzt man die Entfernung beider Mittelpunkte = e, so ist nach Seite 171 R : e = e : R − 2r; sucht man daher zu R und R − 2 r die mittlere Proportionale, so ist der mit ihr als Halbmesser von dem Mittelpunkte des einen Kreises beschriebene Kreis der geometrische Ort für den Mittelpunkt des andern.

51. Ort.

Wenn von einem Dreiecke der Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises = R und der Halbmesser eines äußern Berührungskreises = r′ gegeben sind, so ist eine von

Digitized by Google

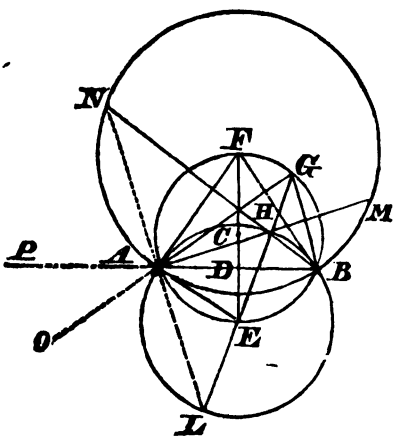
dem Mittelpunkte des einen der beiden Kreise zu beschreibende konstruirbare Kreislinie der geometrische Ort für den Mittelpunkt des andern Kreises.

Beweis. Setzt man die Entfernungen beider Mittelpunkte = e, so ist nach Seite 172 $R : e = e : R + 2r'$; sucht man daher zu R und zu $R + 2r'$ die mittlere Proportionale, so ist der mit ihr als Halbmesser von dem Mittelpunkte des einen Kreises beschriebene Kreis der geometrische Ort für den Mittelpunkt des andern.

52. Ort.

Wenn von einem Dreiecke eine Seite = a und der gegenüberliegende Winkel = α gegeben sind, so ist ein konstruirbarer Kreisbogen der geometrische Ort für den Mittelpunkt des innern Berührungskreises, und drei konstruirbare Kreisbögen die geometrischen Oerter für die Mittelpunkte der drei äußern Berührungskreise.

Konstruktion. Ueber AB = a beschreibe einen Kreisabschnitt, der den Winkel α faßt, und ergänze denselben zum ganzen Kreise. Von dem Mittelpunkte C dieses Kreises fälle auf die Chorde AB einen Perpendikel CD und verlängere denselben, bis er die Peripherie in E und F trifft; ziehe AE, AF und beschreibe von E als Mittelpunkt mit EA als Halbmesser einen Kreis, der auch durch B geht, weil E auf dem im Halbirungspunkt D auf AB errichteten Perpendikel CD liegt und der durch AB in zwei Kreisbögen getheilt wird, so ist der auf der Seite des ersten Kreisabschnitts liegende Bogen der Ort für den Mittelpunkt des innern Berührungskreises, der

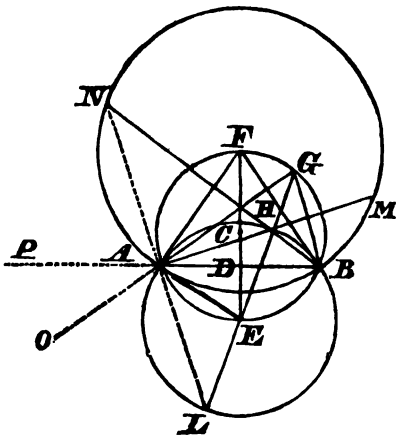


Digitized by Google

auf der entgegengesetzten Seite liegende Bogen der Ort für den Mittelpunkt des zur Seite AB gehörigen äußern Berührungskreises; ebenso beschreibe vom Mittelpunkt F mit FA als Halbmesser einen Kreisbogen auf der nemlichen Seite, auf welcher AFB liegt, der aus demselben Grunde wie der vorige Kreis ebenfalls durch B gehen wird, so ist dieser Bogen der Ort für die zu den beiden andern Seiten des Dreiecks gehörigen äußern Berührungskreise.

Beweis. Da der Kreisabschnitt AFB den Winkel α faßt, so ist seine Peripherie der Ort für die Spitzen aller über AB = a als Grundlinie beschriebenen Dreiecke, welche an der Spitze einen Winkel = α haben; es ist daher nur zu zeigen, daß, wenn man auf diesem Kreisabschnitte einen beliebigen Punkt G nimmt und GA, GB zieht, wodurch ein Dreieck ABG von den gegebenen Eigenschaften entsteht, die Mittelpunkte der vier Berührungskreise dieses Dreiecks auf den angegebenen Bögen liegen müssen. Ziehe nun GE, welches den Bogen AHB in H und verlängert den entgegengesetzten Bogen in L schneide, so ist H der Mittelpunkt des innern, L der Mittelpunkt des zu AB gehörigen äußern Berührungskreises; ziehe ferner AH, BH und verlängere beide, bis sie den letztgenannten Kreisbogen in M und N schneiden, so ist M der Mittelpunkt des zu GB und N der Mittelpunkt des zu GA gehörigen äußern Berührungskreises. Denn da der Bogen AB in E halbirt, also AE = BE ist, so ist EGA = EGB, also AGB durch EG halbirt, und die genannten Mittelpunkte liegen daher auf EG und dessen Verlängerung; ferner ist EA = EH, also EAH = EHA; aber EAH = EAB + BAH und EHA = HGA + HAG; also ist auch EAB + BAH = HGA + HAG; nun ist aber EAB = HGA, weil beide auf den gleichen Bögen EB und EA stehen: daher ist auch BAH = HAG, oder BAG ist durch AH halbirt; also ist H der Durchschnitt der Halbirungslinie beider Winkel AGB und BAG, folglich ist H Mittelpunkt des innern Berührungskreises. Ziehe ferner AL und verlängere GA nach O. Da LH Durchmesser ist, so ist HAL = 90°; aber GAB + BAO = 180°; also ist HAL = $\frac{1}{2}$ (GAB + BAO); nun ist HAB = $\frac{1}{2}$ GAB; also ist BAL = $\frac{1}{2}$ BAO; folglich ist L der Durch-

Digitized by Google



schnitt der Halbirungslinie des Winkels AGB und des Außenwinkels BAO; daher ist L Mittelpunkt des zu AB gehörigen äußern Berührungskreises.

Zieht man ferner NA, FB und verlängert BA nach P, so ist ANB Peripheriewinkel, AFB Centriwinkel im nemlichen Kreisabschnitte ANMB; also ist ANB = $^1/_2$ AFB = $^1/_2$ AGB; ebenso ist BAH = $^1/_2$ BAG und ABH = $^1/_2$ ABG, weil H der Durchschnittspunkt der drei Halbirungslinien der Winkel im Dreiecke ABG ist; daher ist ANB + BAH + ABH = $^1/_2$ AGB + $^1/_2$ BAG + $^1/_2$ ABG; folglich ist ANB + BAH + ABH = $^1/_2$ 180° = 90°; in △ ABN ist also das noch übrige Winkelstück NAH ebenfalls = 90°; also ist NAH = $^1/_2$ (BAG + GAP); aber HAG = $^1/_2$ BAG; daher ist NAG = $^1/_2$ GAP; folglich ist N der Durchschnitt der Halbirungslinie des Winkels ABG und des Außenwinkels GAP; also ist N Mittelpunkt des zu AG gehörigen äußern Berührungskreises.

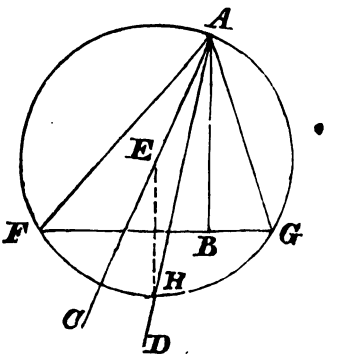
Ebenso wird endlich bewiesen, daß M Mittelpunkt des zu BG gehörigen äußern Berührungskreises ist.

53. Ort.

Wenn von einem Dreiecke eine Höhe = a gegeben ist und die Differenz α derjenigen beiden Winkel, durch welche die gegebene Höhe nicht hindurchgeht, so ist eine konstruirbare gerade Linie der geometrische Ort für den Mittelpunkt des Kreises um das Dreieck und eine konstruirbare andere gerade Linie der geometrische Ort für den Mittelpunkt des innern Berührungskreises.

Digitized by Google

Konstruktion. An AB = a lege in A einen Winkel BAC = α und halbire denselben durch AD, so ist AC der geometrische Ort für den Mittelpunkt des Kreises um das Dreieck und AD der Ort für den Mittelpunkt des innern Berührungskreises.



Beweis. Es ist nachzuweisen, daß, wenn man auf AC einen beliebigen Punkt E annimmt, von E als Mittelpunkt mit EA als Halbmesser einen Kreis beschreibt, auf AB in B einen Perpendikel errichtet, bis dieser den Kreis in F und G trifft, und endlich AF, AG zieht, wodurch ein Dreieck entsteht, das AB = a zur Höhe hat und um welches der erhaltene Kreis beschrieben ist, die Differenz der Winkel AGF — AFG = α sei, und daß durch AD der Winkel FAG halbirt werde, wodurch AD als der Ort erscheint für den Mittelpunkt des innern Berührungskreises von $\triangle$ AFG. Von E fälle auf FG einen Perpendikel und verlängere ihn, bis er AD in H trifft; da EH $\parallel$ AB ist, so ist EHA = HAB = HAE; also ist EH = EA, oder H liegt auf der Kreisperipherie; nun ist aber FHG in H halbirt, weil EH auf der Chorde FG senkrecht ist, also ist auch der Winkel FAG durch AH halbirt; ferner ist

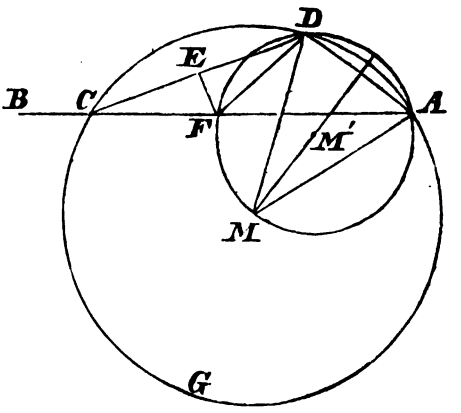
AGF + BAG = 90°, und ebenso
AFG + BAF = 90°; also ist
AGF + HAG = 90° + HAB und
AFG + HAF = 90° — HAB; daher ist, wenn die letztere Gleichung von der darüberstehenden abgezogen wird,
AGF — AFG = 2 HAB (weil HAG = HAF ist)
= BAC (weil BAC durch AD halbirt ist)
= α.

Digitized by Google

54. Ort.

Wenn von einem Dreiecke die Summe zweier Seiten = a und die Differenz ihrer Gegenwinkel = α gegeben ist, so ist eine konstruirbare Kreislinie der geometrische Ort sowohl für die Spitze von einem der Winkel, deren Unterschied gegeben ist, sobald die Spitze des andern Winkels und die Lage der jenem ersten Winkel gegenüberliegenden Seite gegeben ist, als auch der Ort für die Mittelpunkte derjenigen beiden äußern Berührungskreise, welche zu den Seiten gehören, deren Summe gegeben ist.

Konstruktion. Es sei A die gegebene Winkelspitze und die Linie AB bezeichne die Lage der einen Seite; von AB schneide AC = a ab und beschreibe über AC einen Kreisabschnitt ADC, der einen Winkel = $90^0 + {}^1/_2\,\alpha$ faßt, so ist ADC der Ort für die gesuchte Winkelspitze, sowie, wenn ADC zum ganzen Kreise ergänzt wird, dieser selbst der Ort für die Mittelpunkte der beiden äußern Berührungskreise.



Beweis. Nimm auf ADC einen beliebigen Punkt D, ziehe CD und errichte auf CD im Halbirungspunkte E einen Perpendikel, der AC in F treffe; ziehe endlich AD, FD, so ist in $\triangle$ ADF die Seite DF = CF, also AF + DF = AF + CF = AC = a und es ist daher zunächst zu beweisen, daß ADF − DAF = α sei. Nun ist ADC = $90^0 + {}^1/_2\,\alpha$, also ADF = $90^0 + {}^1/_2\,\alpha$ − FDC = $90^0 + {}^1/_2\,\alpha - {}^1/_2$ AFD (da AFD = FDC + FCD, aber FDC = FCD ist); ferner ist DAF = $180^0 - (90^0 + {}^1/_2\,\alpha)$ − ACD = $90^0 - {}^1/_2\,\alpha - {}^1/_2$AFD; daher ist ADF − DAF = $90^0 + {}^1/_2\,\alpha - {}^1/_2$AFD − $90^0 + {}^1/_2\,\alpha + {}^1/_2$AFD = ${}^1/_2\,\alpha + {}^1/_2\,\alpha = \alpha$.

Digitized by Google

Ziehe ferner von A nach dem Mittelpunkte M des Kreisabschnittes ADC, also auch des ganzen Kreises den Halbmesser AM und ziehe MD, so ist ACD Peripheriewinkel auf dem Bogen AD, AMD Centriwinkel auf demselben Bogen; also ist AMD = 2 ACD; aber auch AFD ist = 2 ACD; also ist AMD = AFD; mithin geht ein um △ AFD beschriebener Kreis auch durch M und weil MD = MA, also △ MDA gleichschenklig ist, so halbirt ein von M auf AD gefällter Perpendikel die Chorde AD und geht also durch den Mittelpunkt M' des um △ ADF beschriebenen Kreises. Es ist also, wie in der zum Orte Nr. 52 gehörigen Figur F der Mittelpunkt und FA der Halbmesser des Ortes für die Mittelpunkte der zu GA und GB gehörigen äußern Berührungskreise des in dem Kreise AFGB liegenden Dreiecks AGB war, so hier M der Mittelpunkt und MA der Halbmesser des Ortes für die Mittelpunkte der zu FA und FD gehörigen äußern Berührungskreise des in dem Kreise AMFD liegenden Dreiecks AFD; also ist AGCD dieser Ort.

Digitized by Google

Anhang.

Mein Lehrbuch der ebenen Geometrie enthält zwar einen reichhaltigen Stoff zur Anwendung der geometrischen Analysis, indem sich dort im Ganzen mehr als 370 unaufgelöste geometrische Aufgaben vorfinden. Die dort gegebenen Aufgaben durften jedoch nur den in dem Lehrbuche selbst gegebenen Inhalt voraussetzen, während die hier entwickelte geometrische Analysis manche Mittel dem Schüler gewährt, durch welche er sich auch zur Lösung schwierigerer geometrischer Aufgaben zu befähigen vermag. Theils für geübtere Schüler, welche den im erstgenannten Lehrbuche enthaltenen Stoff schon überwunden haben, theils um überhaupt dem Lehrer eine noch größere und umfassendere Auswahl von Material zu gewähren, sind daher die folgenden Aufgaben hier als Anhang beigefügt worden.

I. Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks.

1. Gegeben die Hypotenuse und die Differenz der Quadrate beider Katheten.
2. Gegeben der Halbmesser des innern Berührungskreises und der Halbmesser entweder des zur Hypotenuse oder des zu einen der beiden Katheten gehörigen äußern Berührungskreises.

Digitized by Google

3. Gegeben die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und die Summe der andern Kathete und des Höhenperpendikels.
4. Gegeben die Summe beider Katheten und die Summe der Hypotenuse und des Höhenperpendikels.
5. Gegeben die Hypotenuse und die Summe beider Katheten und des Höhenperpendikels.
6. Gegeben die Hypotenuse und der Ueberschuß der Summe beider Katheten über den Höhenperpendikel.
7. Gegeben die Hypotenuse und der Ueberschuß der Summe einer Kathete und des Höhenperpendikels über die andere Kathete.
8. Gegeben der Umfang und der Höhenperpendikel.
9. Gegeben die Hypotenuse und die Differenz der Quadrate der auf ihr durch den Höhenperpendikel gebildeten Segmente.
10. Gegeben eine Kathete und das an der andern Kathete liegende Segment der Hypotenuse.
11. Gegeben eine Kathete und das Rechteck aus der Hypotenuse und der andern Kathete.
12. Gegeben der Höhenperpendikel und die Summe der Quadrate beider Segmente der Hypotenuse.
13. Gegeben die Summe der Hypotenuse und des Höhenperpendikels und die Summe der Quadrate beider Segmente der Hypotenuse.
14. Gegeben die Hypotenuse und die Entfernung der beiden Mittelpunkte des umschriebenen Kreises und des innern Berührungskreises.
15. Gegeben die Summe des Höhenperpendikels und eines Segments der Hypotenuse und die Summe des Höhenperpendikels und des andern Segments der Hypotenuse.

II. Konstruktion eines Dreiecks überhaupt.

1. Gegeben das Verhältniß zweier Seiten und die beiden Segmente, in welche die dritte Seite durch den dazu gehörigen Höhenperpendikel getheilt ist.

Digitized by Google

2. Gegeben das Verhältniß zweier Seiten, die zur dritten Seite gehörige Höhe und die Differenz der durch sie auf der dritten Seite entstandenen Segmente.
3. Gegeben zwei Seiten und die Bedingung, daß die dritte Seite gleich dem zu ihr gehörigen Höhenperpendikel werde.
4. Gegeben eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Summe der Quadrate beider andern Seiten.
5. Gegeben eine Seite, die dazu gehörige Höhe und die Summe der Quadrate beider andern Seiten.
6. Gegeben eine Seite, die zu dieser gehörige Mittellinie und die Differenz der Quadrate beider andern Seiten.
7. Gegeben eine Seite, die zu einer der beiden andern Seiten gehörige Mittellinie und die Differenz der Quadrate dieser beiden andern Seiten.
8. Gegeben eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Differenz der Quadrate beider andern Seiten.
9. Gegeben zwei Seiten und das Verhältniß der dritten Seite zu der ihr zugehörigen Höhe.
10. Gegeben eine Seite, die dazu gehörige Höhe und das Verhältniß einer zweiten Seite zu der ihr zugehörigen Höhe.
11. Gegeben eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und das Rechteck aus beiden andern Seiten.
12. Gegeben die Summe zweier Seiten und die Segmente, in welche die dritte Seite durch die dazu gehörige Höhe getheilt ist.
13. Gegeben eine Seite, die dazu gehörige Höhe und die Summe beider andern Seiten.
14. Gegeben die Summe zweier Seiten, die zur dritten Seite gehörige Mittellinie und die zu ebenderselben Seite gehörige Höhe.
15. Gegeben ein Höhenperpendikel, die zu der nemlichen Seite gehörige Mittellinie und der Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises.
16. Gegeben eine Seite, der Halbmesser des umschriebenen Kreises und der Halbmesser des innern Berührungskreises.
17. Gegeben eine Seite, der gegenüberliegende Winkel (oder der Halbmesser des umschriebenen Kreises) und der Halb-

Digitized by Google

messer des zu der gegebenen Seite gehörigen äußern Berührungskreises.

18. Gegeben ein Winkel, der Halbmesser des umschriebenen Kreises und der Halbmesser des innern Berührungskreises.
19. Gegeben ein Winkel, der Halbmesser des umschriebenen Kreises und der Halbmesser des zu der Gegenseite des Winkels gehörigen äußern Berührungskreises.
20. Gegeben ein Höhenperpendikel, die zur nemlichen Seite gehörige Mittellinie und die ebenfalls zu ihr gehörige Halbirungslinie des Gegenwinkels.
21. Gegeben eine Seite, der Flächeninhalt und die Differenz der Quadrate beider andern Seiten.
22. Gegeben ein Winkel, der Flächeninhalt und ein Punkt innerhalb oder außerhalb des Winkels, durch welchen die Gegenseite des Winkels selbst oder ihre Verlängerung hindurchgehen soll.
23. Gegeben der Halbmesser des umschriebenen Kreises, der Halbmesser des innern Berührungskreises und die Differenz zweier Seiten.
24. Gegeben der Halbmesser des umschriebenen Kreises, der Halbmesser des innern Berührungskreises und die Differenz zweier Winkel.
25. Gegeben der Halbmesser des umschriebenen Kreises, der Halbmesser des innern Berührungskreises und eine Höhe.
26. Gegeben der Umfang, ein Winkel und die von ihm nach der Gegenseite gezogene Halbirungslinie des Winkels.
27. Gegeben der Umfang, ein Winkel und der Flächeninhalt.
28. Gegeben der Umfang, ein Winkel und der Halbmesser des innern Berührungskreises.
29. Gegeben die Differenz zweier Winkel, der zum dritten Winkel gehörige Höhenperpendikel und der Halbmesser des umschriebenen Kreises.
30. Gegeben die Differenz zweier Winkel, der zum dritten Winkel gehörige Höhenperpendikel und der Halbmesser des innern Berührungskreises.

Digitized by Google

31. Gegeben die Summe zweier Seiten, die Differenz ihrer Gegenwinkel und der Halbmesser des zu einer dieser beiden Seiten gehörigen äußern Berührungskreises.

32. Gegeben die drei Mittelpunkte der äußern Berührungskreise.

33. Gegeben eine Seite, die Summe beider andern Seiten und der Halbmesser des innern Berührungskreises.

34. Gegeben eine Seite, die Summe beider andern Seiten und der Halbmesser des zur erstern gehörigen äußern Berührungskreises.

35. Gegeben eine Seite, die Summe beider andern Seiten und der Halbmesser des zu einer der beiden letztern gehörigen äußern Berührungskreises.

36. Gegeben der Umfang, ein Höhenperpendikel und der Halbmesser des innern Berührungskreises.

37. Gegeben eine Seite, der dazu gehörige Höhenperpendikel und der Halbmesser des innern Berührungskreises.

38. Gegeben ein Winkel, der zur gegenüberliegenden Seite gehörige Höhenperpendikel und der Halbmesser des innern Berührungskreises.

39. Gegeben ein Winkel, der zur Gegenseite gehörige Höhenperpendikel und das Rechteck aus den beiden den Winkel einschließenden Seiten.

40. Gegeben eine Seite, der Halbmesser des Winkelkreises und das Rechteck aus beiden andern Seiten.

41. Gegeben ein Punkt P und zwei gerade Linien L und L'; ein Dreieck zu konstruiren, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich werde, und dessen Winkelspitzen auf P, L, L' liegen. (Vrgl. Ort 17.)

42. Ebenso ein Dreieck zu konstruiren, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich werde, und dessen Winkelspitzen auf einem gegebenen Punkte P, einer gegebenen geraden Linie L und einem gegebenen Kreise K, oder auf einem gegebenen Punkte P und zwei gegebenen Kreisperipherien K und K' liegen. (Vrgl. Ort 18.)

Digitized by Google

III. Konstruktion eines Vierecks.

1. Ein Parallelogramm zu konstruiren, von welchem beide Diagonalen und das Verhältniß der Seiten gegeben sind.
2. Ein Viereck zu konstruiren, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, wenn die vier Seiten desselben gegeben sind.
3. Ein Quadrat zu beschreiben, dessen vier Seiten durch vier gegebene Punkte P, P′, P″, P‴ gehen.
4. Ein Rechteck zu beschreiben, dessen vier Seiten durch vier gegebene Punkte P, P′, P″, P‴ gehen und von welchem eine Seite eine gegebene Größe hat.
5. Ein Viereck überhaupt zu beschreiben, dessen vier Seiten durch vier gegebene Punkte P, P′, P″, P‴ gehen und welches einem gegebenen Vierecke ähnlich ist.
6. Ein Viereck überhaupt zu konstruiren, von welchem drei Seiten einander gleich sein sollen, wenn gegeben sind die vierte Seite und die beiden an der letztern liegenden Winkel.
7. Ein Trapez zu konstruiren, in welchem die kleinere der beiden parallelen Seiten jeder der beiden nichtparallelen Seiten gleich werden soll, wenn gegeben ist die größere der parallelen Seiten und die Entfernung der parallelen Seiten.

IV. Konstruktion eines Kreises.

1. Gegeben der Halbmesser und die Bedingung, daß die von zwei gegebenen Punkten P und P′ an den Kreis gezogenen Tangenten gegebene Größen haben.
2. Gegeben der Halbmesser, ein Punkt P, durch den er gehen, und ein Kreis K, den er halbiren soll.
3. Gegeben ein Punkt P, durch den er gehen, ein Kreis K, den er berühren, und eine gerade Linie L, auf der sein Mittelpunkt liegen soll.
4. Gegeben der Halbmesser, eine gerade Linie L, die er berühren und ein Kreis K, den er halbiren soll.
5. Gegeben drei Kreise K, K′, K″; der gesuchte Kreis soll seinen Mittelpunkt auf K haben, von K′ rechtwinklig geschnitten und von K″ halbirt werden.

Digitized by Google

6. Gegeben zwei Punkte P, P', durch welche er gehen, und ein Kreis K, den er halbiren soll.
7. Gegeben eine gerade Linie L, auf der sein Mittelpunkt liegen soll, und die Bedingung, daß die von zwei gegebenen Punkten P und P' an ihn gezogenen Tangenten gegebene Größen haben.
8. Gegeben ein Punkt P, durch den er gehen, eine gerade Linie L, die er berühren, und ein Kreis K, den er halbiren soll.
9. Gegeben drei Kreise K, K', K''; der gesuchte Kreis soll seinen Mittelpunkt auf K haben, den Kreis K' rechtwinklig schneiden und den Kreis K'' halbiren.
10. An einen gegebenen Kreis ist in einem gegebenen Punkte eine Tangente gezogen; einen Kreis zu beschreiben, der die Tangente ebenfalls berührt, dessen Mittelpunkt auf der Peripherie des gegebenen Kreises liegt, und der durch den andern Endpunkt des vom gegebenen Berührungspunkte aus im ersten Kreise gezogenen Durchmessers geht.
11. Gegeben der Halbmesser und zwei Kreise K, K', die er halbiren soll.

V. Bestimmung von Punkten mit gegebenen Beziehungen zu andern Punkten und geraden Linien.

1. Gegeben drei in gerader Linie liegende Punkte P, P', P'' und eine gerade Linie L; auf L einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm nach P, P', P'' gezogenen geraden Linien zwei einander gleiche Winkel bilden.
2. Gegeben drei Punkte P, P', P''; einen vierten Punkt zu bestimmen, mit der Eigenschaft, daß die von ihm nach den gegebenen Punkten gezogenen geraden Linien ein gegebenes Verhältniß = m : n : p haben.
3. Gegeben drei Punkte P, P', P''; einen vierten Punkt zu bestimmen mit der Eigenschaft, daß die von ihm nach P und P'' gezogenen geraden Linien einen gegebenen Winkel bilden und daß dieser Punkt zugleich die gemeinschaftliche Spitze zweier einander gleicher Dreiecke werde, deren Grundlinien PP' und P'P'' seien.

Digitized by Google

4. Gegeben sechs Punkte P, P′, P″, P‴, Pᴵᵛ, Pᵛ; einen siebenten Punkt so zu bestimmen, daß, wenn von ihm nach den gegebenen Punkten gerade Linien gezogen werden, die Quadratsumme oder Quadratdifferenz des ersten Linienpaares gleich sei der Quadratsumme oder Quadratdifferenz des zweiten und ebenso der des dritten.
5. Gegeben vier Punkte P, P′, P″, P‴ in gerader Linie; einen fünften Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm nach jenen vier Punkten gezogenen geraden Linien drei einander gleiche Winkel machen.
6. Ein Punkt P und zwei nichtparallele gerade Linien L und L′ sind gegeben; durch P eine gerade Linie zu ziehen, welche L und L′ so schneide, daß die dadurch gebildeten Abschnitte ein gegebenes Verhältniß = m : n haben.
7. Gegeben ein Winkel und eine gerade durch die Winkelspitze gehende Linie, welche den Winkel beliebig theilt; durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß das in den Winkel fallende Stück derselben durch die Theilungslinie des Winkels halbirt, oder in irgend einem gegebenen Verhältnisse = m : n getheilt werde.
8. Gegeben drei gerade Linien L, L′, L″; einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm auf L, L′, L″ gefällten Perpendikel ein gegebenes Verhältniß = m : n : p haben.
9. Gegeben vier gerade Linien L, L′, L″, L‴ so, daß sich L, L′, L″ nicht in einem einzigen Punkte schneiden und L‴ keiner der drei ersten Linien parallel ist; eine Linie parallel mit L‴ so zu ziehen, daß die durch den Durchschnitt mit L, L′, L″ gebildeten zwei Abschnitte derselben ein gegebenes Verhältniß = m : n haben.
10. Gegeben dieselben Bedingungen, wie bei der vorigen Aufgabe; eine gerade Linie parallel L‴ so zu ziehen, daß das zwischen L und L″ liegende Stück derselben durch L′ stetig proportionirt geschnitten werde.
11. Gegeben drei gerade Linien L, L′, L″; auf L″ einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm nach L und L′ unter gegebenen Winkeln α und β gezogenen geraden Linien ein gegebenes Verhältniß = m : n haben.

Digitized by Google

12. Gegeben zwei begrenzte gerade Linien der Lage und Größe nach und eine unbegrenzte der Lage nach; auf letzterer einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm nach den Endpunkten jener beiden gezogenen geraden Linien zwei einander gleiche Dreiecke bilden.
13. Gegeben drei begrenzte gerade Linien der Lage und Größe nach; einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm nach den Endpunkten jener drei gezogenen geraden Linien drei einander gleiche Dreiecke bilden.
14. Gegeben zwei begrenzte gerade Linien der Lage und Größe nach; einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm nach den Endpunkten jener beiden gezogenen geraden Linien zwei einander gleiche Dreiecke bilden und daß ebenso die Quadratsumme des einen Linienpaars der Quadratsumme des andern gleich werde.
15. Gegeben zwei begrenzte gerade Linien der Lage und Größe nach; einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm nach den Endpunkten jener beiden gezogenen geraden Linien zwei einander gleiche Dreiecke bilden und die Quadratsumme der vier von ihm aus gezogenen geraden Linien eine gegebene Größe habe.
16. Gegeben eine begrenzte gerade Linie der Lage und Größe und eine unbegrenzte der Lage nach; auf letzterer denjenigen Punkt zu bestimmen, von welchem aus die erstere Linie unter dem möglichst größten Gesichtswinkel erscheint.
17. Auf einer gegebenen geraden Linie L zwei Punkte so zu bestimmen, daß die von ihnen nach einem gegebenen Punkte P gezogenen geraden Linien ein gegebenes Verhältniß $= m : n$ haben und einen gegebenen Winkel α einschließen.
18. Auf einem gegebenen Kreise K zwei Punkte so zu bestimmen, daß die von ihnen nach einem gegebenen Punkte P gezogenen geraden Linien ein gegebenes Verhältniß $= m : n$ haben und einen gegebenen Winkel α einschließen.
19. Auf einer gegebenen geraden Linie L zwei Punkte so zu bestimmen, daß die von ihnen nach einem gegebenen Punkte P gezogenen geraden Linien ein Rechteck von gegebener Größe $= a^2$ bilden und einen gegebenen Winkel α einschließen.

Digitized by Google

20. Gegeben ein Punkt P und zwei gerade Linien L und L'; durch P eine gerade Linie zu ziehen, welche L und L' so schneide, daß das Rechteck aus den Entfernungen der Durchschnittspunkte von P eine gegebene Größe $= a^2$ habe.
21. Auf einer begrenzten geraden Linie einen Punkt zu bestimmen, der die Linie so in zwei Abschnitte theile, daß das Rechteck aus denselben gleich werde dem Quadrate der Differenz beider Abschnitte.
22. Auf einer begrenzten geraden Linie einen Punkt zu bestimmen, der die Linie so in zwei Abschnitte theile, daß das Quadrat des einen Theils doppelt so groß ist als das Quadrat des andern.

VI. Konstruktion von Punkten und Linien in und an Dreiecken und Vierecken.

1. In einem gegebenen Dreiecke eine gerade Linie parallel mit einer Seite so zu ziehen, daß in dem dadurch entstandenen Trapeze die Summe beider parallelen Seiten gleich wird der Summe beider nichtparallelen.
2. In der Ebene eines Dreiecks liegt ein zweites dem ersten kongruentes Dreieck, in welchem die gleichen Winkel in der nemlichen Ordnung auf einander folgen; es soll ein Punkt gefunden werden, um welchen sich das erste Dreieck drehen muß, um mit dem zweiten zusammenzufallen.
3. Durch einen gegebenen Punkt in der Ebene eines Dreiecks eine gerade Linie so durch das Dreieck hindurch zu ziehen, daß, wenn man von den drei Winkelspitzen auf sie Perpendikel fällt, der auf der einen Seite liegende Perpendikel gleich wird der Summe beider auf der andern Seite liegenden.
4. Innerhalb eines gegebenen Vierecks einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm nach den vier Winkelspitzen gezogenen geraden Linien das Viereck in vier Dreiecke theilen, von denen je zwei gegenüberliegende einander gleich sind.

Digitized by Google

VII. Konstruktion von Punkten und Linien in und an Kreisen.

1. Durch einen Durchschnittspunkt zweier einander schneidender Kreise eine gerade Linie so zu ziehen, daß das Rechteck aus den in beide Kreise fallenden Chorden eine gegebene Größe $= a^2$ erhalte.
2. Durch einen Durchschnittspunkt zweier einander schneidender Kreise eine Chorde in den einen Kreis so zu legen, daß das Rechteck aus den beiden Theilen, in welche sie durch den andern Kreis getheilt wird, eine gegebene Größe $= a^2$ erhalte.
3. Gegeben ein Punkt P, eine gerade Linie L und ein Kreis K; durch P eine gerade Linie so hindurch zu ziehen, daß sie L und K schneide und daß die zwischen P, L und K liegenden Stücke derselben einander gleich werden.
4. In einem gegebenen Kreise ist ein Centriwinkel gegeben; an den dazu gehörigen Bogen eine Tangente so zu ziehen, daß das zwischen den verlängerten Schenkeln des Winkels liegende Stück derselben durch den Berührungspunkt in einem gegebenen Verhältnisse $= m : n$ getheilt werde.
5. Gegeben ein Kreis K und zwei gerade Linien L und L'; durch K eine Sekante parallel mit L so zu ziehen, daß die in den Kreis fallende Chorde zu dem zwischen K und L' liegenden Abschnitte ein gegebenes Verhältniß $= m : n$ habe.
6. Gegeben ein Kreis K und eine gerade Linie L; auf L einen Punkt so zu bestimmen, daß, wenn von ihm nach K eine gerade Linie von gegebener Größe gezogen wird, die in den Kreis dadurch fallende Chorde ebenfalls von gegebener Größe werde.
7. Gegeben ein Kreis K, eine gerade Linie L und ein Punkt P; auf L einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm nach P gezogene gerade Linie gleich der von ihm nach K gezogenen Tangente werde.
8. Gegeben zwei Kreise K, K' und ein Punkt P; durch P eine gerade Linie so zu ziehen, daß das zwischen beiden Kreisen liegende Stück derselben in P halbirt, oder nach einem gegebenen Verhältnisse $= m : n$ getheilt werde.

Digitized by Google

9. Gegeben zwei Kreise K, K'; einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm nach beiden Kreisen gezogenen Tangentenpaare gleiche Winkel einschließen und daß die Quadratsumme aller vier Tangenten eine gegebene Größe $= a^2$ habe.
10. Gegeben zwei Kreise K, K' und eine gerade Linie L; auf L einen Punkt so zu bestimmen, daß die von ihm nach beiden Kreisen gezogenen Tangentenpaare gleiche Winkel einschließen.
11. Gegeben drei Kreise K, K', K''; auf K einen Punkt so zu bestimmen, daß die Quadratsumme der von ihm nach K' und K'' gezogenen Tangenten eine gegebene Größe $= a^2$ habe.
12. Gegeben drei Kreise K, K', K''; auf K einen Punkt so zu bestimmen, daß die Differenz der Quadrate der beiden von ihm nach K' und K'' gezogenen Tangenten eine gegebene Größe $= a^2$ habe.
13. Gegeben drei Kreise K, K', K''; einen Punkt so zu bestimmen, daß die drei von ihm nach den drei Kreisen gezogenen Tangenten einander gleich werden.
14. Gegeben drei Kreise K, K', K''; einen Punkt so zu bestimmen, daß die drei von ihm nach den drei Kreisen gezogenen Tangentenpaare einander gleiche Winkel bilden.
15. Durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines gegebenen Kreises eine Chorde so hindurch zu ziehen, daß dieselbe in dem Punkte nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werde.
16. Gegeben ein Winkel und ein beide Schenkel desselben berührender Kreis; an den Kreis eine Tangente so zu ziehen, daß das zwischen den Schenkeln des Winkels liegende Stück derselben eine gegebene Größe habe.
17. Gegeben zwei Kreise K und K'; einen Punkt zu bestimmen, der die Eigenschaft hat, daß die von ihm an beide Kreise gezogenen Tangenten einander gleich sind und einen gegebenen Winkel einschließen.

VIII. Beschreibung von Figuren in und um andere.

1. In den konzentrischen Ring zweier Kreise ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Digitized by Google

2. In ein gegebenes Dreieck ein Quadrat zu beschreiben, wobei auch der Fall zu beachten ist, daß die Winkelspitzen des Quadrats auf den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks liegen.
3. In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck von gegebenem Umfang zu beschreiben.
4. In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, von welchem die Differenz zweier anliegenden Seiten gegeben ist.
5. In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, dessen Diagonale gegeben ist.
6. In ein gegebenes Parallelogramm ein Quadrat zu beschreiben.
7. In ein gegebenes Parallelogramm einen Rhombus zu beschreiben, dessen Diagonalen ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.
8. In ein gegebenes Parallelogramm ein Rechteck zu beschreiben, dessen Diagonalen sich unter einem gegebenen Winkel schneiden.
9. In ein gegebenes Dreieck zwei Kreise so zu beschreiben, daß beide einander und jeder zwei Seiten des Dreiecks berühre und daß ihre Centrale einer gegebenen geraden Linie parallel werde.
10. In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, dessen Seiten ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.
11. In ein gegebenes Parallelogramm ein anderes zu beschreiben, welches einem gegebenen Parallelogramme ähnlich ist.
12. In ein gleichseitiges Dreieck ein anderes gleichseitiges Dreieck so zu beschreiben, daß die Seiten beider auf einander senkrecht stehen.
13. In ein gegebenes Dreieck ein anderes, das einem zweiten gegebenen Dreiecke ähnlich sei, so zu beschreiben, daß eine Seite des einbeschriebenen parallel werde mit einer Seite des gegebenen umschriebenen.
14. Um ein gegebenes Viereck einen Rhombus zu beschreiben, von welchem ein Winkel gegeben ist.

Druck von J. P. [illegible] in Augsburg.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

DEC 29
JUN 11 1887
DEC 20

Digitized by Google

Gebunden von
C. W. Freise

Math 5238.76
Geometrische analysis.
Cabot Science
003349841
3 2044 091 920 280